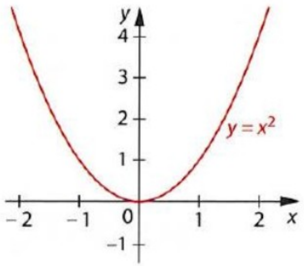
Continuité – Fiche de cours

1. Notion de continuité

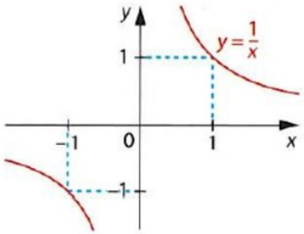
a. Définition

Une fonction définie sur un intervalle I est continue si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille)

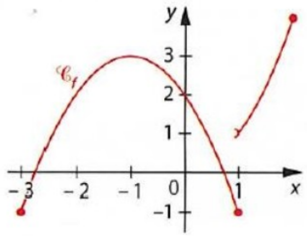
• La fonction carré est continue sur ℝ.



• La fonction inverse est continue sur]– ∞ ; 0[et sur]0 ; + ∞[(mais pas sur ℝ).



• f est définie mais pas continue sur [– 3 ; 2]. Il y a une rupture en x = 1.



b. Théorème de continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I :

- f est continue en a lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

c. Propriétés

- Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue, exponentielles,) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I ; la réciproque est fausse

2. Théorème des valeurs intermédiaires

On souhaite résoudre l'équation $f(x)=k$

Soit f une **fonction continue et strictement monotone** sur un **intervalle** [$\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$].

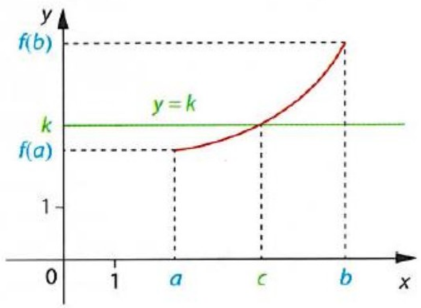
Cas de f croissante :

Si $k \in [f(a); f(b)]$ alors il existe un unique $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha)=k$

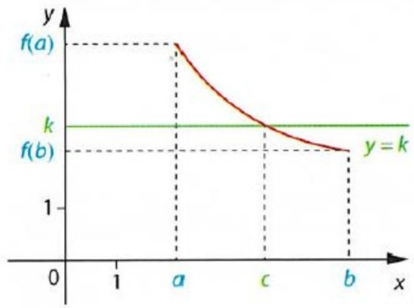
Cas de f décroissante :

Si $k \in [f(b); f(a)]$ alors il existe un unique $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha)=k$

• Cas où f est strictement croissante



• Cas où f est strictement décroissante



3. Application aux suites

a. Application de la continuité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $L \in I$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(L)$$

b. Théorème du point fixe

Soit f une fonction définie et continue sur I à valeurs dans I :

pour $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to \infty} u_n = L$ alors $L = f(L)$ et $L \in I$