

# Fonction logarithme – Exercices – Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

Pour les fonctions suivantes, indiquer :

- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première et les variations de la fonction
- l'expression de la fonction dérivée seconde et la convexité de la fonction

$$f(x) = \ln x + 2x \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

## Exercice 2 corrigé disponible

Pour les fonctions suivantes, indiquer :

- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première

$$f(x) = \frac{\ln x + x^2}{x+1} \qquad f(x) = \ln x - \frac{x^3}{\ln x}$$

## Exercice 3 corrigé disponible

Etudier les limites suivantes

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{x^2 + 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 \ln(x)$

## Exercice 4 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminé l'ensemble de définition.

1.  $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) = 0$
2.  $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x$
3.  $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(x-3)$
4.  $2\ln^2(x) - \ln(x) - 3 < 0$
5.  $\text{Ln}\left(\frac{5-4x}{x+3}\right) = 1$

## Exercice 5 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminé l'ensemble de définition.

1.  $\frac{1}{2} \text{Ln}(x+3) = \text{Ln}(x+1)$
2.  $\text{Ln}^2(x) - 7\text{Ln}(x) + 12 \leq 0$
3.  $\text{Ln}(x^2 - 4) \leq \text{Ln}(2) + \text{Ln}(x)$
4.  $(7x-5)\text{Ln}(x+1) > 0$
5.  $\text{Ln}(5-x) - \text{Ln}(3) + \text{Ln}(x-1) \leq 0$

## Exercice 6 corrigé disponible

Pour chacune des fonctions suivantes :

- a. Déterminer le domaine de définition, étudier les limites
- b. Dresser le tableau de variation
- c. Étudier la convexité

1.  $f : x \rightarrow \frac{1}{\ln x}$
2.  $f : x \rightarrow \frac{1}{x} - \ln x$
3.  $f : x \rightarrow \frac{-1}{\ln x - 1}$

## Exercice 7 corrigé disponible

### Partie A

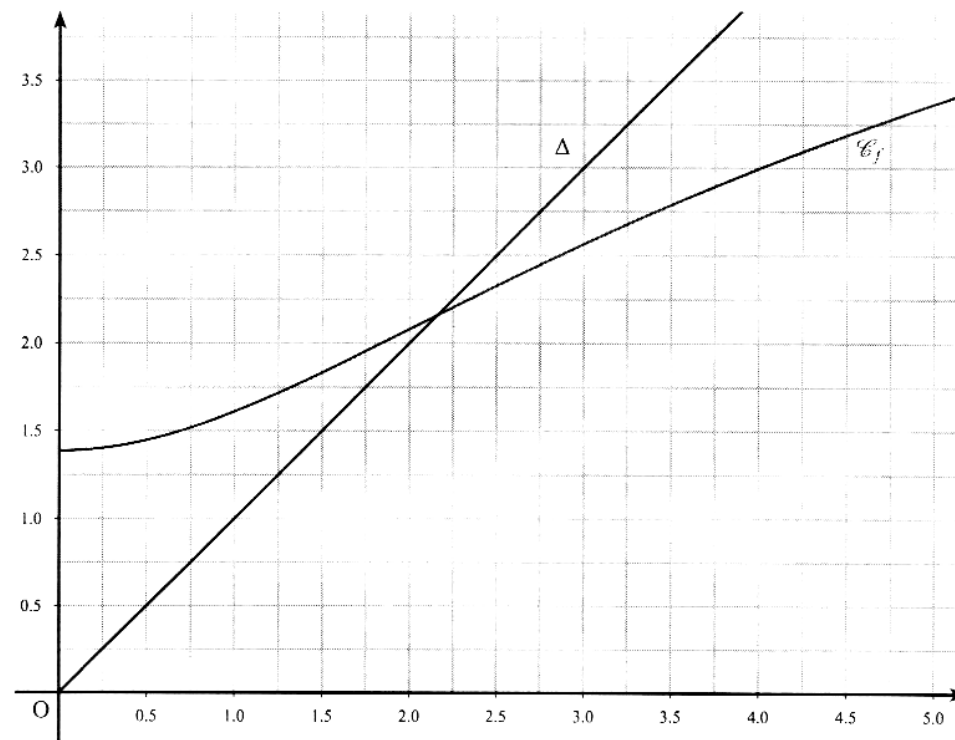
Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

- 1) Étudier le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = f(x) - x$ .
  - a) Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $\ln(x^2 + 4) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$ .  
En déduire la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
  - b) Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  puis établir son tableau de variations.
  - c) Montrer que sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution noté  $\alpha$ .
  - d) Déterminer un encadrement de la valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$
  - e) Déduire des questions précédentes le tableau de signes de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . La courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  sont tracées sur le graphique en annexe (à rendre avec la copie).

- 1) En utilisant la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta$ , placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite  $(u_n)$  en laissant apparaître les traits de construction.  
Quelle conjecture pouvez-vous faire quant aux variations de la suite  $(u_n)$  et à sa convergence ?
- 2) Placer le point  $I$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  qui a pour abscisse  $\alpha$ .
- 3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $1 \leq u_n \leq \alpha$ .  
b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante (on pourra s'aider de la partie A). En déduire alors qu'elle converge vers  $\ell$   
c) Déterminer la valeur  $\ell$  et en donner une valeur approchée au millièmes.



## Exercice 8 corrigé disponible

1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a)  $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$       b)  $\ln(3x^2 - x - 2) > \ln(6x + 4)$

- 2) a) Montrer que :  $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$   
b) En déduire les solutions de :  $2 \ln^3 x - 3 \ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$

### Exercice 9 corrigé disponible

$(u_n)$  est la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$$

On note  $(v_n)$  la suite définie pour tout  $n$  par :  $v_n = \ln u_n - 2$ .

- 1) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique et préciser  $v_0$  et sa raison  $r$ .
- 2) En déduire  $v_n$ , puis  $\ln u_n$ , en fonction de  $n$ .
- 3) a) Quelle est la limite de la suite  $(v_n)$  ?  
b) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $e^2$ .

### Exercice 10 corrigé disponible

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes les unes des autres.

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\frac{13}{1+2e^{-2x}} = 2$ .
- 2) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel  $n$  tel que :  $0,91^n < 0,0001$ .
- 3) Déterminer la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x + 2e^{-3x})$ .
- 4)  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \ln(e^{-x} + 2)$ . Montrer que la courbe de  $h$  admet une asymptote horizontale à préciser. Etudier la position relative de la courbe représentative de  $h$  et de cette asymptote.
- 5) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-1 ; +\infty[$  par :  $g(x) = x \ln(x+1)$ , et  $C_g$  sa courbe représentative.

Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

Affirmation " La tangente à  $C_g$  en son point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur  $\frac{1}{2}$  ".

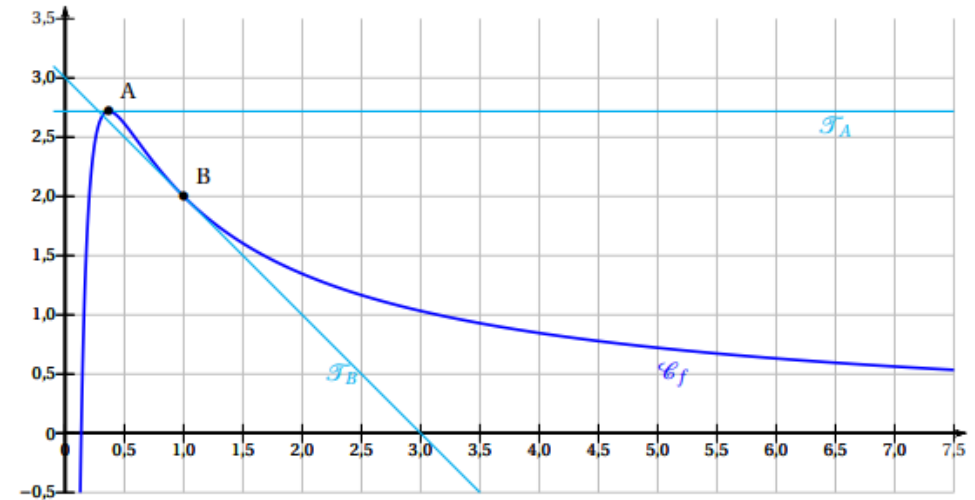
- 6) Déterminer, en justifiant :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^2)$ .

### Exercice 11 corrigé disponible

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ ;
- la tangente  $\mathcal{T}_A$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A de coordonnées  $(\frac{1}{e} ; e)$ ;
- la tangente  $\mathcal{T}_B$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point B de coordonnées  $(1 ; 2)$ .

La droite  $\mathcal{T}_A$  est parallèle à l'axe des abscisses. La droite  $\mathcal{T}_B$  coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées  $(3 ; 0)$  et l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0 ; 3)$ .



On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

#### PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de  $f'(\frac{1}{e})$  et de  $f'(1)$ .
2. En déduire une équation de la droite  $\mathcal{T}_B$ .
3. Trouver la bonne réponse :  $f'(x) \leq 0$  sur :  
a)  $]0 ; 0,5]$  ; b)  $]0,5 ; +\infty[$  ; c)  $[0,5 ; +\infty[$  ; d)  $[e^{-1} ; +\infty[$  ; e)  $]0 ; +\infty[$



**Partie B**

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

1a) Rappeler  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$  (on attend une démonstration).

1b) Calculer la limite de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0.

1c) Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

2a) Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $g'(x) = 3 - \ln(x)$ .

2b) Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ , et dresser son tableau de variation complet.

2c) Démontrer que sur  $]0 ; 5]$ , l'équation  $4x - x \ln(x) = 7$  admet une unique solution notée  $\alpha$  que l'on encadrera à  $10^{-1}$  près.