Fonction logarithme – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Pour les fonctions suivantes, indiquer :
- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première et les variations de la fonction
- l'expression de la fonction dérivée seconde et la convexité de la fonction

$f(x)=\ln x+2x$ $\qquad$ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

Exercice 2 **corrigé disponible**

Pour les fonctions suivantes, indiquer :
- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première

$f(x)=\dfrac{\ln x+x^2}{x+1}$ $\qquad$ $f(x)=\ln x-\dfrac{x^3}{\ln x}$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(\ln(x))}{x^2+1}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x^2\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^3+2x^2-x+2}{x^3+7x^2+3x+4}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+2x+7}{x^3+3x+4}\right)$

Exercice 4 **corrigé disponible**

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)=0$
2. $\ln(4x+2)-\ln(x-1)=\ln x$
3. $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)=\ln(x-3)$
4. $2\ln^2(x)-\ln(x)-3<0$
5. $Ln\left(\dfrac{5-4x}{x+3}\right)=1$

Exercice 5 **corrigé disponible**

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\dfrac{1}{2}Ln(x+3)=Ln(x+1)$
2. $Ln^2(x)-7Ln(x)+12\leq 0$
3. $Ln(x^2-4)\leq Ln(2)+Ln(x)$
4. $(7x-5)Ln(x+1)>0$
5. $Ln(5-x)-Ln(3)+Ln(x-1)\leq 0$

Exercice 6 **corrigé disponible**

Pour chacune des fonctions suivantes :

a. Déterminer le domaine de définition, étudier les limites
b. Dresser le tableau de variation
c. Etudier la convexité

1. $f:x\to\dfrac{1}{\ln x}$
2. $f:x\to\dfrac{1}{x}-\ln x$
3. $f:x\to\dfrac{-1}{\ln x-1}$

Exercice 7 corrigé disponible

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

1) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

   a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(x^2 + 4) = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)$.

   En déduire la limite de g en $+\infty$.

   b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ puis établir son tableau de variations.

   c) Montrer que sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution noté α.

   d) Déterminer un encadrement de la valeur approchée de α à 10^{-3}

   e) Déduire des questions précédentes le tableau de signes de g sur $[0\,;+\infty[$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique en annexe (à rendre avec la copie).

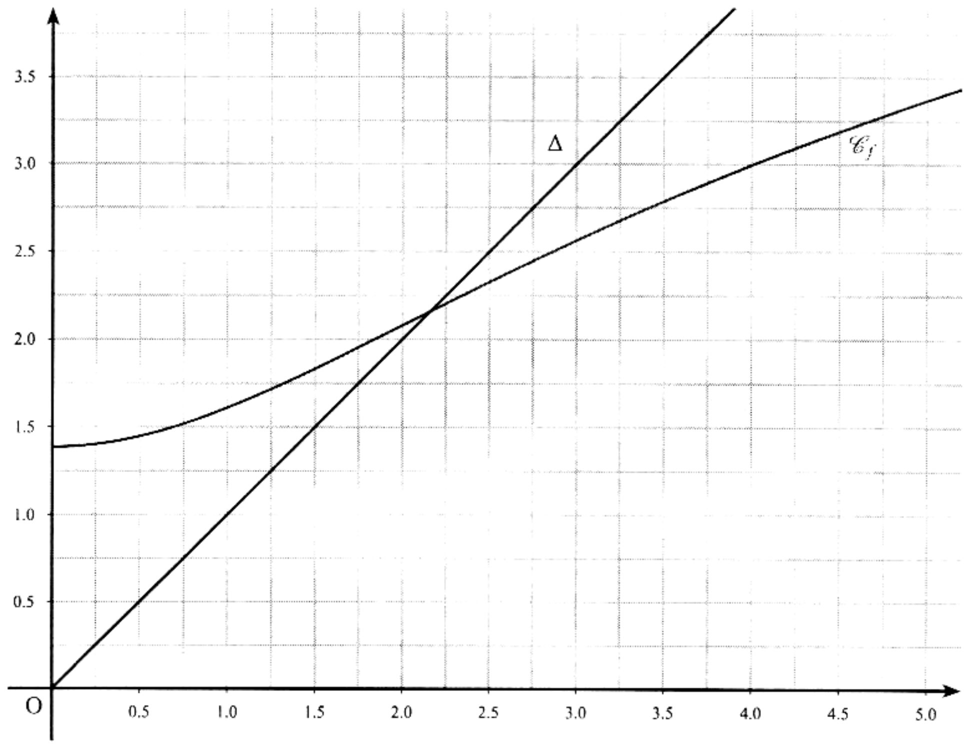
1) En utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparaître les traits de construction.
   Quelle conjecture pouvez-vous faire quant aux variations de la suite (u_n) et à sa convergence ?

2) Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse α.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante (on pourra s'aider de la partie A). En déduire alors qu'elle converge vers ℓ

   c) Déterminer la valeur ℓ et en donner une valeur approchée au millième.



Exercice 8 corrigé disponible

1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

   a) $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$ b) $\ln(3x^2 - x - 2) > \ln(6x + 4)$

2) a) Montrer que : $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

   b) En déduire les solutions de : $2\ln^3 x - 3\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$

Exercice 9 **corrigé disponible**

(u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$

On note (v_n) la suite définie pour tout n par : $v_n = \ln u_n - 2$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser v_0 et sa raison r.
2) En déduire v_n, puis $\ln u_n$, en fonction de n.
3) a) Quelle est la limte de la suite (v_n) ?
   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2.

Exercice 10 **corrigé disponible**

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes les unes des autres.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{13}{1+2e^{-2x}} = 2$.

2) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que : $0{,}91^n < 0{,}0001$.

3) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = ln(x + 2e^{-3x})$.

4) h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = ln(e^{-x} + 2)$. Montrer que la courbe de h admet une asymptote horizontale à préciser. Etudier la position relative de la courbe représentative de h et de cette asymptote.

5) Soit g la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par : $g(x) = xln(x+1)$, et C_g sa courbe représentative.

Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

Affirmation " *La tangente à C_g en son point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur* $\frac{1}{2}$ ".

6) Déterminer, en justifiant : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xln(x^2)$.

Exercice 11 **corrigé disponible**

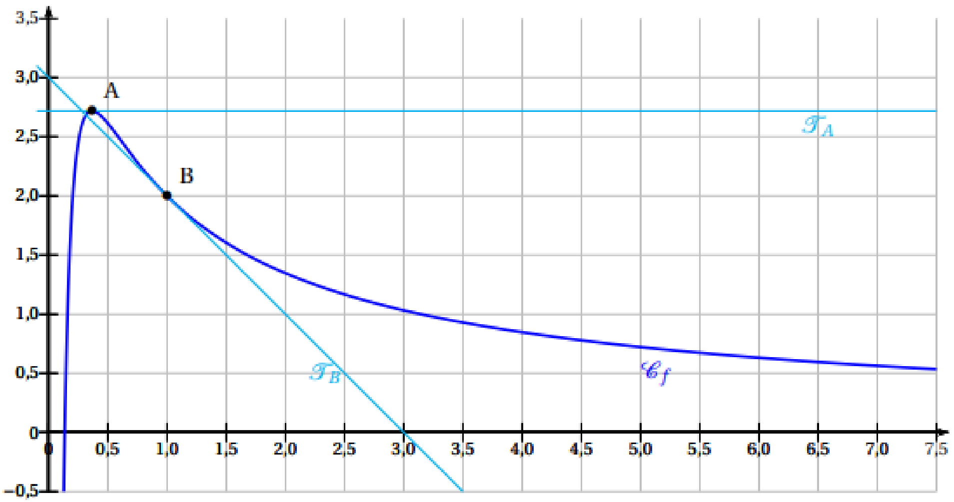
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$;

— la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\ ;\ e\right)$;

— la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\ ;2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\ ;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.

2. En déduire une équation de la droite $\mathscr{T}_B$.

3. Trouver la bonne réponse : $f'(x) \leq 0$ sur :

a) $]0\ ;0{,}5]$; *b)* $]0{,}5\ ;+\infty[$; *c)* $[0{,}5\ ;+\infty[$; *d)* $[e^{-1}\ ;+\infty[$; *e)* $]0\ ;+\infty[$

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

En déduire la position relative de T_B par rapport à C_f

Exercice 12 **corrigé disponible**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

$a)$ $ln(x+1) \leq 0$ $\qquad$ $b)$ $4e^{3x-1} = 1$.

c) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait : $\dfrac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0{,}999$

2) La fonction suivante modélise le nombre de bactéries : $g(t) = 10^6 \times e^{0,25t}$, où t désigne la durée exprimée en heure.

$a)$ Déterminer, le nombre d'individus de la population initiale.

$b)$ Déterminer la durée nécessaire au *doublement* de la population initiale. Même question concernant son *décuplement*.

3a) Soit a un réel strictement positif. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g (notée C_g) en son point A d'abscisse a.

3b) Déterminer, en détaillant votre démarche, le nombre de tangentes à C_g qui passent par le point $B(1\,;1260\,000)$

Exercice 13 **corrigé disponible**

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Exercice 14 **corrigé disponible**

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

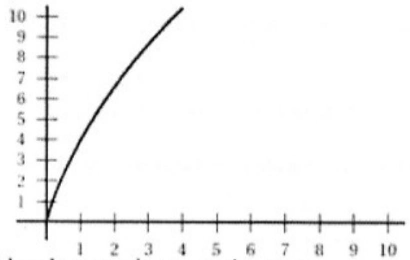
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. La première conjecture de l'élève (g est à valeurs positives) est-elle vraie ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g sur $]0\ ;+\infty[$.

1a) Rappeler $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x$ (on attend une démonstration).

1b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

1c) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - ln(x)$.

2b) Etudier le sens de variation de g sur $]0\ ;\ +\infty[$, et dresser son tableau de variation complet.

2c) Démontrer que sur $]0\ ;\ 5]$, l'équation $4x - xln(x) = 7$ admet une unique solution notée α que l'on encadrera à 10^{-1} près.