Fonctions trigonométriques – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $]-\pi\,;\pi]$

1. $\cos(x)=\frac{1}{2}$
2. $\sin(x)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\sin(x)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos(x)<\frac{-\sqrt{3}}{2}$
5. $\sin(x)=\cos(x)$
6. $2\sin^2(x)+\sin(x)-1=0$
7. $3\sin^2(x)-4=0$

Exercice 2 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(\frac{1}{n})$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sin(\frac{1}{n})$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos(\frac{1}{x})-x$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x^2-1)}$

Exercice 3 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)-\sin(x)$

On note *C* sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$

1. Montrer que la fonction f est impaire . Que peut-on en déduire pour la courbe *C* ?
2. Démontrer que pour tout x réel $f'(x)=2\cos^2(x)-\cos(x)-1$.
3. Factoriser $2X^2-X-1$.
   En déduire le signe du signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$
4. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$
5. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0;\pi]$ puis sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$

Exercice 4 corrigé disponible

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to-\sin(x)\cdot\cos(x)$

1. Montrer que *f* est impaire et π-périodique
2. Montrer que pour tout réel x $f'(x)=2(\sin(x)-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}})$
3. Dresser le tableau de variation de *f* sur $[0;\frac{\pi}{2}]$
4. Déterminer l'intersection de la courbe *f* avec chacun des axes
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de *f* à l'origine
6. Tracer la courbe de *f* pour $x\in[-2\pi\,;2\pi]$

Exercice 5 corrigé disponible

Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to(1+\cos(x))\cdot\cos(x)$ et *C* sa courbe représentative

1. Rappeler les propriétés de parité et de périodicité de la fonction cosinus.
2. Etudier la parité et la périodicité de h.
3. Démontrer que $\forall\, x\in\mathbb{R}\; h'(x)=-(1+2\cdot cos x)\cdot\sin x$.
4. Résoudre $1+\cos x=0$ puis $1+\cos x>0$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.
5. Dresser le tableau de signes de $h'(x)$ pour $x\in[0;\pi]$; en déduire le tableau de variations de h sur cet intervalle.
6. Expliquer comment on peut déduire de la question (2) la courbe de *C* sur $\mathbb{R}$ à partir de la courbe sur $[0;\pi]$.
7. Représenter la courbe C sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$.

Exercice 6 corrigé disponible

Soit *g* la fonction définie pour $x\in[-2\pi\;;\;2\pi]$ par $g(x)=\sqrt{2}x+2\sin(x)$

1. Démontrer que *g* est une fonction impaire.

2. Justifier brièvement la dérivabilité de *g* et calculer $g'(x)$ pour tout $x\in[0\;;\;2\pi]$.

3. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ puis le tableau de variations de pour $x\in[0\;;\;2\pi]$

4. Déduire des questions 1. et 2. le tableau de variations de g sur l'intervalle $[-2\pi\;;\;2\pi]$

Exercice 7 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-3 \leq f(x) \leq 3$
2) Déterminer la parité de la fonction f
3) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$. En déduire que f est périodique et préciser sa période.
4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -6\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
5) a) Montrer que si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $2x + \frac{\pi}{2} \in [0;\pi]$. En déduire le signe de f'sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

   c) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$
6) Donner l'équation de la tangente en f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$

Exercice 8 corrigé disponible

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$

1. Démontrer que f est impaire et périodique. En déduire que l'on peut restreindre l'étude sur $[0;\pi]$
2. Etudier les variations de f sur $[0;\pi]$
3. Donner l'allure de la courbe sur $[-2\pi;2\pi]$

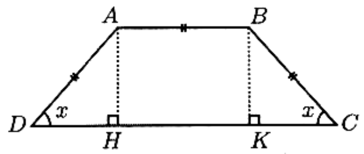
Exercice 9 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$

1. On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = \tan x - x$
   a. Déterminer les limites de g aux bornes de I.
   b. Etudier les variations de g.
   c. Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur I.
2. a. Justifier que f est dérivable sur I et calculer f'
   b. Factoriser $f'(x)$ pour tout x de I puis en utilisant la question 1, déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.
   c. Déterminer les variations de f sur I. En déduire le signe de f sur I.

Exercice 10 corrigé disponible

On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-dessous où $AD = AB = BC = 1$.
On note x la mesure en radians des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD}$.



Le but de l'exercice est de trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze est maximum.

1. Exprimer la hauteur h du trapèze en fonction de x.
2. Démontrer que l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze est définie, pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\mathscr{A}(x) = \sin(x)(1+\cos(x)).$$
3. Démontrer que la dérivée $\mathscr{A}'$ de la fonction $\mathscr{A}$ est définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\mathscr{A}'(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1.$$
4. Factoriser le trinôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire une factorisation de $\mathscr{A}'(x)$.
5. Etudier le signe de $\mathscr{A}'(x)$ et dresser le tableau de variation de $\mathscr{A}$.
6. Conclure.

Exercice 11 corrigé disponible

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$ où x désigne un réel.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal où 3 cm représente π sur l'axe des abscisses et 2cm représente une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, le dénominateur $2+\cos x$ ne s'annule jamais.

2. **a.** Démontrer que f est périodique de période 2π.
b. Démontrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
c. A l'aide des deux questions précédentes démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$.
b. Etudier le signe de f' sur $[0;\pi]$.
c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

4. Dans le repère décrit ci-dessus représenter $\mathscr{C}$ restreinte à l'intervalle $[-\pi;3\pi]$.

Exercice 12 **corrigé disponible**

Soit la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x)=5\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

1. Démontrer que *f(x)* est 4π-périodique et que par conséquent l'étude de la fonction *f* peut être restreint à l'intervalle I=[0 ;4π].

2. Etudier les variations de *f* sur I.

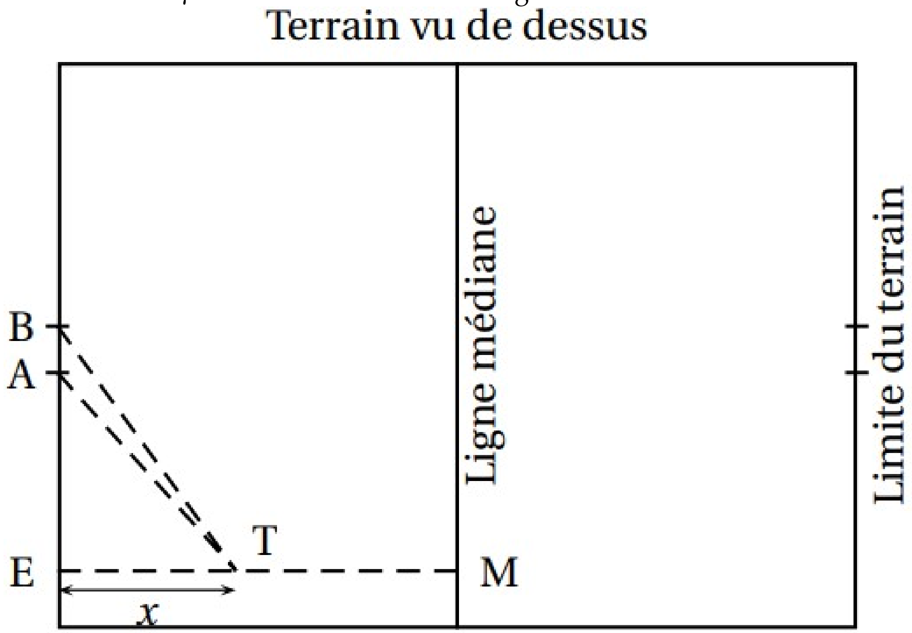
3. Démontrer que *f* admet plusieurs tangentes horizontales sur I. Donner leur équation.

4. Représenter *f* dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ pour x appartenant à [0 ;4π].

5. Résoudre sur ℝ l'équation $f(x)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 13 **corrigé disponible**

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB]. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.
Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.
Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.
Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m .
On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et de γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.



1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure de γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.
On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan(a-b)=\frac{(\tan a-\tan b)}{(1+\tan a\cdot\tan b)}$$

Montrer que $\tan \gamma=\frac{5{,}6\,x}{x^2+765}$

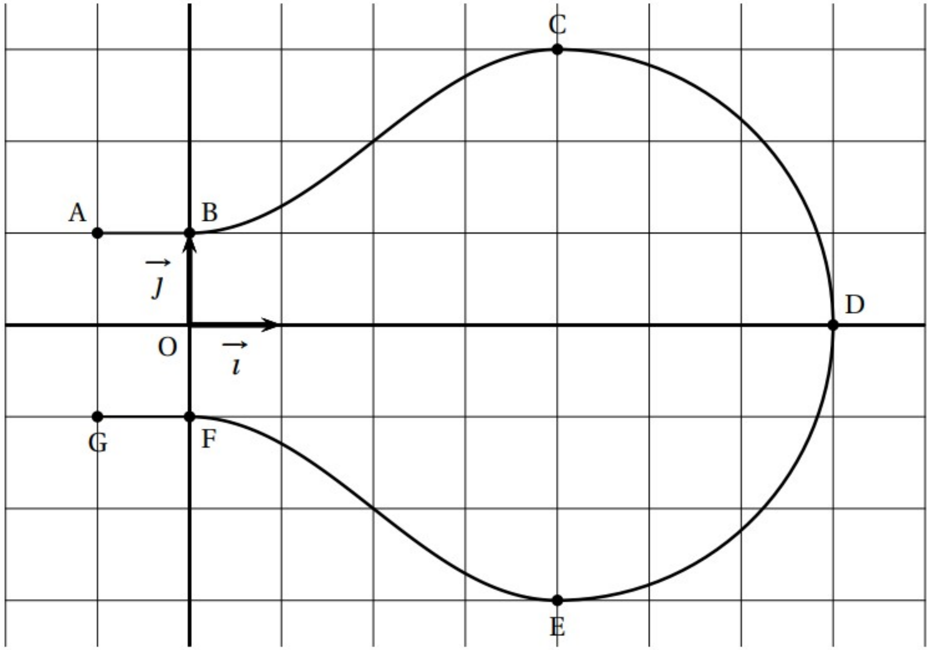
4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle]0; 50] de la fonction f définie par :

$$f(x)=x+\frac{765}{x}$$

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Exercice *14* corrigé disponible

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On considère les points :
A(-1 ; 1), B(0; 1), C(4; 3), D(7; 0), E(4 ; -3), F(O ; -1) et G(-1 ; -1).
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-après :



• La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :
• la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle [–1 ; 0] par $h(x) = 1$;
La portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle [0; 4] par $f(x)=a+b\sin\left(c+\frac{\pi}{4}x\right)$, où a, b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
• la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].
La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x de l'intervalle [0; 4], déterminer $f'(x)$.
b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.
2. Déterminer les réels a et b.

Exercice *15*

Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D} = [-\pi;0[\cup]0;\pi]$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\cos(x)-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique ?
2. Etudier $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0;\pi]$. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;\pi]$.
4. Déterminer le point d'intersection A de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses et donner l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.
5. Donner l'équation réduite de la tangente T' à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse π.
6. Tracer les tangentes T et T' et la courbe représentative de f sur l'intervalle $]0;\pi]$. En déduire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\mathscr{D}$.

Exercice *16*

1. Déterminer les limites suivantes en justifiant soigneusement la réponse :

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{x}}$ $b)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{5x+2}{2-x}$ $c)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{\sqrt{3}}{x^2-4}$ $d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+7x+1}{x+3}}$

2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\cos\left(\dfrac{n+3}{n^2+1}\right)$.
Déterminer la limite de (u_n) en $+\infty$. (*Justifier soigneusement la réponse.*)

Exercice *17*

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f : f(x)=(x+2)\cos(x)$ $\qquad$ $h : h(x)=\dfrac{3+\cos(x)}{3+\sin(x)}$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

$a)$ $\cos(3x)=0$

$b)$ $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$