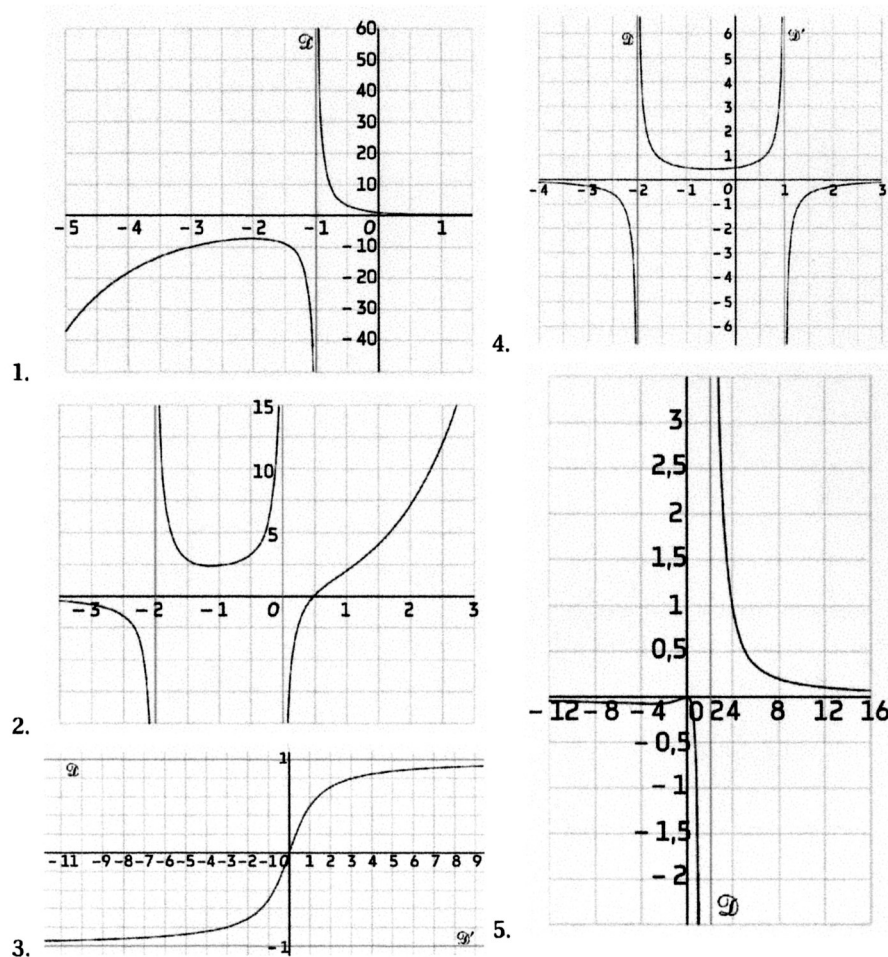


Limites de fonctions – Comportement asymptotique - Exercices

Exercice 1 corrigé disponible

Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction f ainsi que les éventuelles asymptotes. En déduire :

- le domaine de définition de f
- les limites aux bornes de l'ensemble de définition



Exercice 2 corrigé disponible

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction f . Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$.

Exercice 3 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x)$$

- $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{3}{x}$
- $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{x}{1+x}$; $g(x) = \frac{x}{1-x}$

Exercice 4 corrigé disponible

Etudier la limite à droite et à gauche de a pour chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$; $a = \frac{1}{2}$
- $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $a = 1$
- $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$; $a = 1$

Exercice 5 corrigé disponible

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{4x-1}{3x+1}$
2. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3x^2+5}$
3. $f(x) = \frac{-4x+1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \frac{3x^4+1}{3x+1}$

Exercice 6 corrigé disponible

f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ par : $f(x) = \frac{2x - \sin x}{3x+1}$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{2x-1}{3x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{3x+1}$$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 7 corrigé disponible

On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x \geq 0$: $4x^2 \leq 4x^2+x+1 \leq (2x+1)^2$
2. En déduire que pour tout réel $x > 0$: $2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8 corrigé disponible

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-2x+3}}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-3x+2}{x+1}$

Exercice 9 corrigé disponible

On considère 3 fonctions f , g et h , définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout nombre réel x , on a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si l'on sait que l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors on peut en déduire :

Réponse A : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Réponse B : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Réponse C : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Exercice 10 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement) :

1. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-5x+6}{(3-x)^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{2x^2+3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{4-x}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{5x^2-1}$

6.

Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4; 3\}$ par $g(x) = \frac{2x-6}{-x^2+7x-12}$. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et 4^+ .

Exercice 11 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) Si pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leq \frac{2}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2) Si pour tout $x > 0$, on a $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

3) Si pour tout $x > 0$, on a $1 + \frac{3}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in [1; 2]$.

4) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y = a$.

Exercice 12 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3}$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - 3}{2-x}$

Exercice 13 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0[$ par :

$$f(x) = x^3 - \cos x$$

1. Démontrer que l'on a pour tout $x \leq 0$:

$$f(x) \leq x^3 + 1$$

2. En déduire la limite de f en $-\infty$.

Exercice 14 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 9 - \frac{16}{x^2 + 4}}$

Exercice 15 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?
b. Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.
c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 3)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2+2x}{3x^3-7}$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 17 corrigé disponible

Vrai ou faux

- a. Si pour tout réel x , $f(x) \geq x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- c. Si pour tout réel x strictement positif, $1 \leq f(x) \leq x$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 18 corrigé disponible

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse (éventuellement par une définition ou un dessin) :

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > 10^4$.
2. Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, alors il existe un intervalle de la forme $]m; +\infty[$ tel que pour tout $x \in]m; +\infty[$, $f(x) < 0$.
4. Si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 19 corrigé disponible

Déterminer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 7\sqrt{x} + 2}{-3 + x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

Exercice 20 corrigé disponible

Déterminer :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 5}{4x + 1}}$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2}$.

Exercice 21 corrigé disponible

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$

On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les réels a , b , c et d tels que, pour tout réel $x \neq 2$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$$

- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C).
- Donner l'équation de la droite (D), autre asymptote à (C).

Exercice 22 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 11}{2x + 3}$

C est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unité graphique : 1cm).

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f(x)$. Donner une interprétation graphique.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, on a : $f(x) = x + 1 + \frac{8}{2x + 3}$

Etudier alors la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Soit D la droite d'équation $y = x + 1$.

Montrer que D est une asymptote oblique à C en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 23 corrigé disponible

Déterminer la limite de chacune des fonctions dans l'endroit indiqué.

$$f_1(x) = \frac{x-4}{x^2+3x+2} \text{ en } -2^-.$$

$$f_2(x) = x^3 - x^2\sqrt{x}; \text{ en } +\infty.$$

$$f_3(x) = (-3x^2 + 5x - 11)^{111}; \text{ en } +\infty$$

$$f_4(x) = \frac{x^5 + 4x^2 + 3\pi}{5 - x^2}; \text{ en } -\infty.$$

$$f_5(x) = \frac{\sin((x-1)^2)}{x-1}; \text{ en } 1$$

$$f_6(x) = \frac{\cos(3x) + x}{x+2}; \text{ en } -\infty$$

Exercice 24 corrigé disponible

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2 - \cos x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x \sin x$$

Exercice 25 corrigé disponible

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = e^{-3x}$$

$$b) g(x) = e^x + e^{-x}$$

$$c) h(x) = x + e^x$$

$$d) k(x) = e^{2x} + e^x + 1$$

$$e) l(x) = e^{3x} - e^x$$

$$f) m(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$$

$$g) n(x) = \frac{-2e^x}{1 + e^x}$$

Exercice 26 corrigé disponible

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x^2 + 2 - e^x$$

$$b) g(x) = \frac{2e^x - x}{x^2}$$

$$c) h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$d) l(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$$

$$e) k(x) = \frac{\sqrt{e^x + 2}}{x}$$

$$f) t(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{x^2 + x - 3}$$

Exercice 27 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$

Préciser l'équation des éventuelles asymptotes

$$1. f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$2. f(x) = e^x - x$$

$$3. f(x) = e^{2x} - xe^x + 1$$

$$4. f(x) = x^4 - 2xe^x + e^2$$

$$5. f(x) = 2x^3 + 3x - \frac{1}{x}$$

$$6. f(x) = (e^{2x} - 1)(1 - e^x) + \frac{1}{x}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}-1} + e^x$$

$$8. f(x) = \frac{-2}{x^3+2x} + \sqrt{x^2}$$

Exercice 28 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 - x + 3}{x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 4x}{-x^2 - 2x + 8}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{\sqrt{9 - x}}{x^2 - 81}$$

Exercice 29 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x(-x - 1)}{(x^2 + 2)(x + 3)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{(x + 2)(x - 5)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 5x - 1}{4x^2 + x + 1}$$

Exercice 30 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes à l'endroit indiqué.

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2 - 3}{x - 3x^2}\right) \text{ sur } D = \mathbb{R}_+^*. \text{ Limite en } +\infty. \quad \left| \quad g(x) = \frac{2x + 2}{3x^2 + 7x + 4}. \text{ Limite en } -1.$$

Exercice 31 corrigé disponible

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

Déterminer les limites de f et g aux bornes de leur domaine de définition

Exercice 32 corrigé disponible

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = e^x - x$

b. $f(x) = (x + 1)e^x$

c. $f(x) = 4xe^{-x}$

d. $f(x) = x - e^{-x}$

e. $f(x) = \frac{e^x - 4}{e^x + 2}$

f. $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$

Exercice 33 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{1 - x^2}{x}\right)e^{-x}$

Répondre par vrai ou faux en justifiant sa réponse.

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

B. la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f quand f tend vers $+\infty$.