Loi binomiale – Fiche de cours

1. Loi binomiale

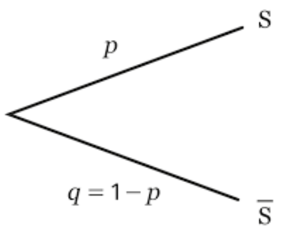
1.1. Définitions

- Loi ou épreuve de Bernouilli

La loi de Bernouilli est une expérience aléatoire avec 2 issues :

- Succès : probabilité p
- Echec : probabilité $1-p$

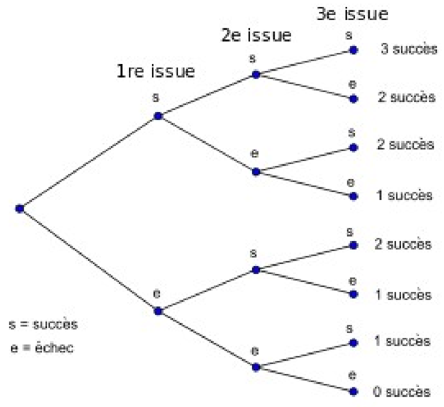
p est appelé paramètre de la loi de Bernouilli



- Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès

Pour n répétitions identiques et indépendantes de la loi de Bernouilli de paramètre p, X suit une loi binomiale B(n ; p)



1.2. Probabilité de la loi binomiale

On souhaite obtenir k fois le succès lors de n répétitions pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale B(n ; p)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

1.3. Espérance et écart type

- Espérance mathématique

$$E(X)=n\times p$$

- Variance et l'écart type

$$V(X)=n\times p\times(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

1.4. Propriété de la loi binomiale

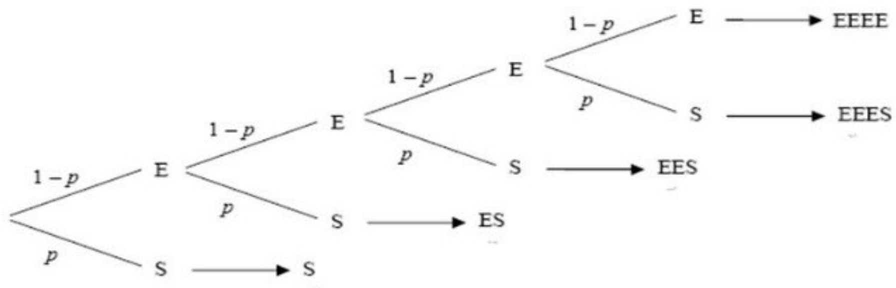
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$ et $0\leq\alpha\leq1$; alors il existe un intervalle $I=[a;b]$ tel que :

- $P(X\in I)\geq1-\alpha$ ou $P(a\leq X\leq b)\geq1-\alpha$
- $P(X\in I)\leq\alpha$ ou $P(a\leq X\leq b)\leq\alpha$

2. Autres lois de probabilités

2.1. Loi géométrique

La loi géométrique est une situation de répétition d'épreuves de Bernouilli jusqu'à obtenir un succès



- Probabilité de la loi géométrique

On souhaite obtenir k fois le succès lors de n répétitions pour la variable aléatoire X qui suit la loi géométrique G(p)

$$P(X=n)=p \cdot q^{n-1}$$

- Espérance et écart type de la loi géométrique

- Espérance mathématique

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

- Variance et l'écart type

$$V(X)=\frac{1-p}{p^2} \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

2.2. Loi de Poisson

- Approximation de la binomiale par la loi de Poisson

Lorsque $n \geq 30$ $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 5$ on dit qu'il y a convergence de loi entre la loi binomiale et la loi de Poisson

- Probabilité de la loi de Poisson

Pour la variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

- Espérance et écart type de la loi de Poisson

- Espérance mathématique

$$E(X)=\lambda$$

- Variance et l'écart type

$$V(X)=\lambda \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$