Loi des grands nombres – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance x. Déterminer x tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) \leqslant \frac{1}{3}$.

Exercice 2 **corrigé disponible**

Soit X une variable aléatoire positive telle que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = a$ avec $a > 2$.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant a^n) \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 3 **corrigé disponible**

Un économiste affirme la chose suivante :

« Moins de 6,2 % de la population mondiale adulte est millionnaire ».

On donne les données suivantes :

- la richesse mondiale est de 278,1 billions de dollars (1 billion représente 1 000 milliards) ;
- la population adulte mondiale s'élève à 4,5 milliards.

Peut-on penser que l'économiste a raison ? Justifier.

Exercice 4 **corrigé disponible**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=\frac{1}{4}$; on arrondira les résultats à 10^{-3} près

1. Calculer $P(16 \leq X \leq 34)$
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(|X-E(X)| \leq 9)$ et vérifier le résultat de la question 1
3. Calculer $P(X \leq 12 \text{ ou } X \geq 38)$
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|X-E(X)| \geq 13)$ et vérifier le résultat de la question 3

Exercice 5 **corrigé disponible**

On lance 3600 fois un dé équilibré à 6 faces.
Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 4 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 6 **corrigé disponible**

1. On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires N_1, N_2,..., N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale X de paramètres (20 ; 0,615). Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.
Calculer l'espérance E(S) et la variance V (S) de la variable aléatoire S.

2. On considère la variable aléatoire $M_{10}=\frac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M_{10} dans le contexte de l'exercice ?
b. Calculer $E(M_{10})$ et $V(M_{10})$.
c. À l'aide de l'inégalité de concentration, justifier l'affirmation ci-dessous. « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 88% »

Exercice 7 **corrigé disponible**

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le numéro obtenu sur le dé est 5 et 0 sinon

On lance n fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

On note M_n le nombre moyen de 5 obtenus.

À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la valeur minimale de n pour respecter les conditions de l'exercice.

1. $a = 0{,}02$ et $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant 0{,}05$.

2. Vérifier le résultat avec un programme en langage Python.

Exercice 8 **corrigé disponible**

On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$, puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Exercice 9 **corrigé disponible**

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.

Soit X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X.
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

Exercice 10 **corrigé disponible**

Amir distribue tous les jours des prospectus à la sortie du métro.

Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i-ième jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100.

Au bout de combien de jours peut-il être sûr au risque de 5 % d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus par jour ?

Exercice 11

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment.

Les variables aléatoires donnant la masse de l'aiguille en grammes sont :

- X pour les heures d'espérance 3 et d'écart-type 0,15 ;
- Y pour les minutes d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.

1) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.
2) Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux aiguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g.
   Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?

Exercice 12

Soit V et n deux nombres entiers naturels non nuls, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance 0 et de variance V.

Pour quelles valeurs de V et n a-t-on $P(|M_n| < 3) \geqslant \frac{1}{18}$?

a. aucune | **b.** $V = 2$ et $n = 1$

c. $V = 1$ et $n = 2$ | **d.** $V = 18$ et $n = 36$

Exercice 13

X est une variable aléatoire d'espérance 0 et d'écart-type 1. Pour tout réel strictement positif a, on a :

a. $P(|X|<a) \leqslant \frac{1}{a^2}$ **b.** $P(|X|<a) \geqslant \frac{1}{a^2}$

c. $P(|X|<a) \leqslant \frac{a^2-1}{a^2}$ **d.** $P(|X|<a) \geqslant \frac{a^2-1}{a^2}$

Exercice 14

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions. On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

• Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.

• La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients. On admet que son espérance E (Y_1) est égale à 30 000 et que sa variance V (Y_1) est égale à 100 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée. On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$. On arrondira les résultats à 10^{-5} près

1. Calculer l'espérance E (X_2) de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z=\frac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Calculer E(Z) et V (Z)

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros

Exercice 15

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé fini Ω d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$

On pose $M_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$

1. Démontrer que pour tout $a>0$: $\lim_{n\to\infty} P(|M_n-E(X)|\geq a)=0$

2. Soit X une variable aléatoire avec $E(X)=190$ et $V(X)=48400$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ est un échantillon de taille n

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près

a. Donner un majorant de $P(X-190\geq 250)$

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(|M_n-190|\leq 370)>0{,}8$

c. Combien vaut $\lim_{n\to+\infty} P(|M_n-190|\leq 370)$?