Orthogonalité et distances dans l’espace – Exercices – Devoirs

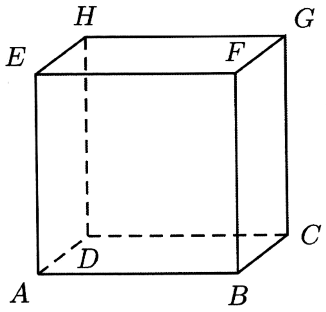
Exercice 1 corrigé disponible

Soit *ABCDEFGH* un cube.

1. Montrer que $(EF)\perp(BG)$.

2. En déduire que $(EC)\perp(BG)$

3. Prouver que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (BDG).
Indication : on pourra étudier la position de (BD) par rapport au plan (EAC).



Exercice 2 corrigé disponible

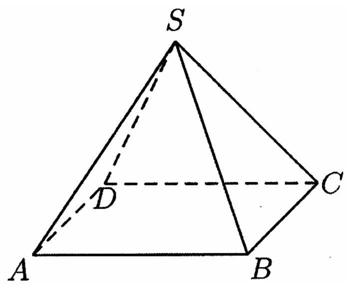
SABCD est une pyramide à base carrée de sommet *S* et dont toutes les côtés ont la même longueur *a*. Calculer en fonction de *a*, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$

2. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$

3. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$

4. $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}$



Exercice 3 corrigé disponible

Les droites *d* et *d’* définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ?

$$(d):\begin{cases}x=2t-1\\y=-3t+2\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\qquad \text{et}\qquad (d'):\begin{cases}x=3s\\y=s+2\\z=-3s-2\end{cases}\quad s\in\mathbb{R}$$

Exercice 4 corrigé disponible

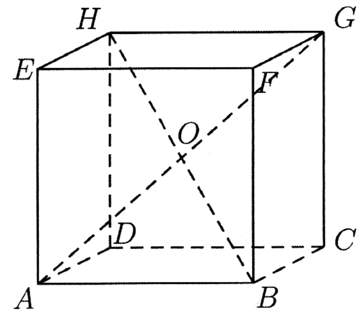
SABCDEFGH est un cube de centre *O* et d’arête *a*.

1. Calculer en fonction de *a*, les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG}$

b. $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BA}$

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$



2. Déterminer dans le repère $\left(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$ les coordonnées des points *A, B, E, G, H et O.*

3. Déterminer une mesure de l’angle $\widehat{HOG}$ à $\dfrac{1}{10}$ de degré près

Exercice 5 corrigé disponible

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$.

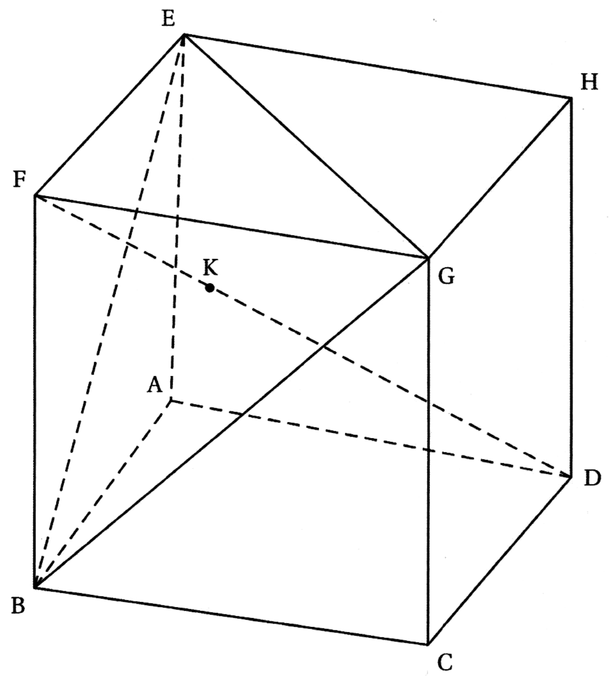
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{cases}1\\-1\\1\end{cases}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).

3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $K\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$.

4. Quelle est la nature du triangle (BEG) ? Déterminer son aire.

5. En déduire le volume du tétraèdre ($BEGD$).



Exercice 6 corrigé disponible

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On appelle P le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et P' le plan d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Montrer que P et P' sont sécants en une droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases}x=\alpha\\y=2\alpha+5\\z=5\alpha+5\end{cases}\quad \text{avec } \alpha \text{ réel donné}$$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

Affirmation 1 : D est parallèle au plan R d'équation $-5x + 5y - z = 0$

Soit D' la droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=-3\beta\\y=1+\beta\\z=2+2\beta\end{cases}\quad \text{avec } \beta \text{ réel donné}$$

Affirmation 2 : D et D' sont coplanaires.

Exercice 7 corrigé disponible

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées et une seule est exacte.

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

La droite D est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases}x=5-2t\\y=1+3t\\z=4\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

1. On note P le plan d'équation cartésienne $3x + 2y + z - 6 = 0$

(a) La droite D est perpendiculaire au plan P,

(b) La droite D est parallèle au plan P,

(c) La droite D est incluse dans le plan P.

2. On note D' la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\,'=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

(a) Les droites D et D' sont parallèles,

(b) Les droites D et D' sont sécantes,

(c) Les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

Exercice 8 corrigé disponible

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan P a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

La droite D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+t \\ y = -t \\ z = -1-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

On donne les points de l'espace $M(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et $N(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

1. **(a)** La droite D et le plan P sont sécants au point $A(-8\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   (b) La droite D et le plan P sont perpendiculaires.
   (c) La droite D est une droite du plan P.
   (d) La droite D et le plan P sont strictement parallèles.
2. **(a)** La droite (MN) et la droite D sont orthogonales.
   (b) La droite (MN) et la droite D sont sécantes.
   (c) La droite (MN) et la droite D sont confondues.

Exercice 9 corrigé disponible

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le point $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y - z + 4 = 0$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Démontrer que A est un point du plan $\mathcal{P}$.

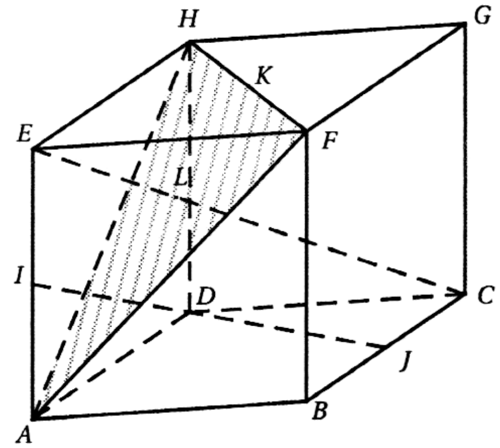
2) Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x = 2z$. On admet que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

   Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 10 corrigé disponible

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, représenté page suivante et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$. On appelle P le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment $[AE]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[HF]$.
Le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan P.

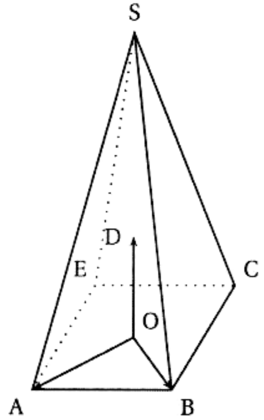


Ceci est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Justifier les réponses.

1. **(a)** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   (b) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   (c) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   (d) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. **(a)** Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   (b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à -1.
   (c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   (d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 2.

Exercice 11 corrigé disponible

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0\,;0\,;3)$ dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\,;-\frac{1}{6}\,;0\right)$.

   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

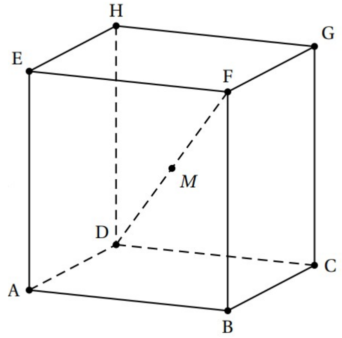
1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$.

   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

Exercice 12 corrigé disponible

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci contre. Les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$



Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Partie B

À tout réel x de l'intervalle [0; 1], on associe le point M du segment [DF] tel que

$$\overrightarrow{DM}=x\cdot\overrightarrow{DF}$$

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle EMB lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0\leq\theta\leq\pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D? avec le point F?

2. a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\,;x\,;x)$.

b. Montrer que $\cos\theta=\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$

On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction pour $0\leq\theta\leq\pi$

4. Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b. l'angle θ est-il maximal?

Exercice 13

Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathcal{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathcal{Q}$
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$.