# Orthogonalité et distances dans l'espace – Fiche de cours

## 1. Base orthonormée de l'espace

On appelle base orthonormée de l'espace 3 vecteurs linéairement indépendants $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tels que : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

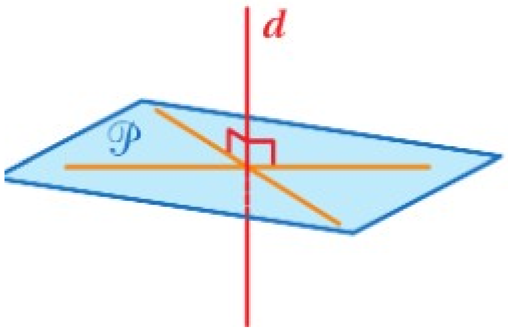
## 2. Orthogonalité dans l'espace

### a. Orthogonalité de deux droites

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque la projection de celles-ci sur un plan sont deux droites perpendiculaires

### b. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

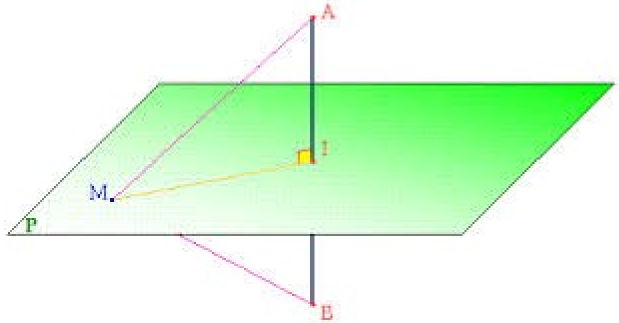
Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan




**Propriété :** Toute droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan

### c. Plan médiateur

Le plan médiateur d'un segment désigne l'ensemble des points de l'espace équidistants de l'extrémité de ce segment.



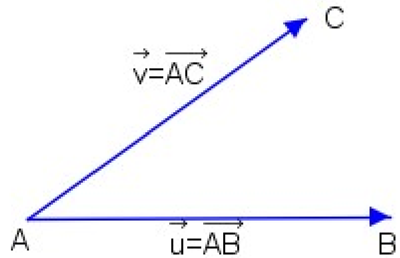

**Propriété :** Le plan médiateur passent le milieu d'un segment et est perpendiculaire à celui-ci.

## 3. Produit scalaire dans l'espace

### a. Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel suivant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

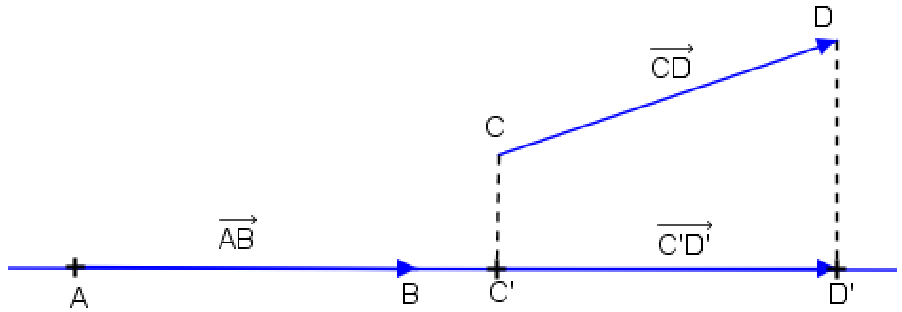


### b. Autres expressions du produit scalaire

- projeté orthogonal

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs, C et D se projettent orthogonalement en C′ et D′ sur la droite (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=\overline{AB}\cdot\overline{C'D'}$$




définition analytique

Si dans un repère orthonormal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x,y,z) et (x′,y′,z′) alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

- définition de la norme (formules de polarisation)

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut être défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

On pourra utiliser la relation suivante :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

### c. Propriétés de bilinéarité

- symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- bilinéarité : pour tous réels a et b

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(a\cdot\vec{u})\cdot(b\cdot\vec{v})=a\cdot b\times\vec{u}\cdot\vec{v}$

### d. Critère d'orthogonalité

$$\begin{cases}\vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0}\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}\ et\ \vec{v} \text{ orthogonaux}$$

## 4. Equations de droites, de plans et de sphères dans l'espace

### a. Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

On définit une droite $(d)$ de l'espace avec un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;y_{\vec{u}}\,;z_{\vec{u}})$ et un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)\in(d)$

La représentation paramétrique de la droite $(d)$ est :

$$(d):\begin{cases}x=t\cdot x_{\vec{u}}+x_A\\ y=t\cdot y_{\vec{u}}+y_A\\ z=t\cdot z_{\vec{u}}+z_A\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

### b. Equation cartésienne de plan

Soit un vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ normal à un plan.

Une équation cartésienne de ce plan est :

$ax+by+cz+d=0$ avec *a*, *b* et *c* non tous nuls

### c. Equation cartésienne de sphère

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ le centre d'une sphère de rayon R

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$$

# 5. Distances dans l'espace

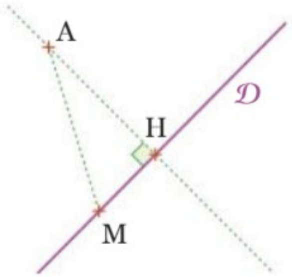
## a. Distance entre 2 points

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace

On a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

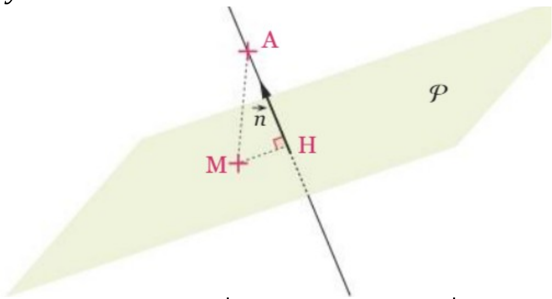
## b. Distance d'un point à une droite

La distance entre un point A et une droite (d) est définie par la distance entre le point A et son projeté orthogonal H sur la droite (d).




## c. Distance d'un point à un plan

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ ; si l'équation cartésienne du plan de l'espace est $(P): ax+by+cz+d=0$




$$d(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$