

Primitives et équations différentielles – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$

2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$

3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$

4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 8$

Exercice 2 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$

2. $x \mapsto \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$

3. $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$

4. $x \mapsto \frac{9x^2 - 3}{(x^3 - x)^2}$

5. $f(x) = (4 - x) \cdot (x^2 - 8x)^5$

Exercice 3 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0$

2. $2y' - 3y = 8y + 4y'$

3. $5y' + 3y = 0$

4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 4 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

1. $y' + \sqrt{2}y = 0$ avec $F(\sqrt{2}) = 1$.

2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $F(0) = 5$.

3. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y'$ avec $F(3) = \frac{1}{e}$.

Exercice 5 corrigé disponible

Après avoir déterminé une fonction affine φ solution particulière de l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 2x$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = -2$.

Exercice 6

Après avoir déterminé une fonction polynôme du second degré φ solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4x^2 - 2x + 1$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = 4$.

Exercice 7

Après avoir déterminé une fonction φ de la forme $x \mapsto mxe^{2x}$ (avec $m \in \mathbb{R}$) solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2e^{2x}$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = -1$.

Exercice 8

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f: x \mapsto -\frac{1}{(x+2)^2}$; $I =]-\infty ; -2[$

2. $f: x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$; $I =]-3 ; +\infty[$

Exercice 9

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f: x \mapsto -xe^{x^2-1}$; $I = \mathbb{R}$ 2. $f: x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 10

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $y' = e^{2x} + 2e^{-\frac{x}{2}}$; $I = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$; $y_0 = \frac{1}{2}$

2. $y' = 2x(x^2+1)^3$; $I = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$; $y_0 = \frac{3}{4}$

Exercice 11 corrigé disponible

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$; $x_0 = 2$; $y_0 = -\sqrt{2}$

2. $y' = 3e^x$; $I = \mathbb{R}$; $x_0 = 1$; $y_0 = e$

Exercice 12 corrigé disponible

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et k est un réel.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si F est positive et dérivable sur I avec $F' = f$, alors f est croissante sur I .

2. Si F est décroissante et dérivable sur I avec $F' = f$, alors f est négative sur I .

3. Si $F' = f$, alors f est une primitive de F sur I .

4. Si $F' = f$, alors F est une primitive de f sur I .

5. Si F est une primitive de f sur I , alors $F + k$ est une primitive de f sur I .

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $I =]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $I =]-2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 2}{(x+2)^2}.$$

1. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 15

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y' + 3y = 0$ et $y(2) = 1$. 2. $5y' - 2y = 0$ et $y(5) = e$.

Exercice 16

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\sqrt{3}y' + y = 0$ et $y(\sqrt{3}) = \frac{1}{e^3}$.

2. $y' - \pi^2 y = 0$ et $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi$.

Exercice 17

1. $2y' + y = x + 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$.

2. $y' + 3y = 2x - 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$.

3. $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

4. $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice 18 corrigé disponible

1) Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

2) On considère l'équation différentielle

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

soit une solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).

Résoudre l'équation (E').

3) Etudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R} par

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$$

4) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de h .

5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction h et Γ celle de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Etudier les positions relatives de \mathcal{C} et de Γ .

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Exercice 19 corrigé disponible

1) On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction ϕ dérivable sur \mathbb{R} telle que $\phi' = \phi$ et $\phi(0) = 1$. On considère un réel a .

a. Montrer que la fonction $f: x \mapsto e^{ax}$ définie sur \mathbb{R} est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

b. On considère une fonction g solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et on note h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de $y' = ay$.

2) On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f_0 définie sur \mathbb{R} par $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E) .

b. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0) .

d. En déduire les solutions de (E) .

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 20 corrigé disponible

On considère les deux équations différentielles définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' + (1 + \tan x)y = \cos x \qquad (E_0) \quad y' + y = 1$$

1) Déterminer les solutions de (E_0) .

2) On considère deux fonctions f et g dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ telles que $f(x) = g(x) \cos x$.

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0) .

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 21

[1] On considère l'équation différentielle $\frac{y'}{3} + y = x^3$ (E).

Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

[2] On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 9e^{-2x}$ (E).

Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

[3] Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$.

[4] Résoudre l'équation différentielle $2y' = -y$.

[5] Résoudre l'équation différentielle $2y' = 5y$.

[6] Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 1$.

[7] Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = 7y$ telle que $f(1) = e$.

Exercice 22

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 3y$

4) $y + 3y' = 2$

2) $y' + 2y = 0$

5) $2y + 3y' - 1 = 0$

3) $y' = 2y + 1$

6) $2y' = y - 1$

Exercice 23

Résoudre les équations différentielles proposées avec la condition initiale proposée :

1) $y = -5y'$ avec $f(-2) = 1$

2) $y + 2y' = 0$ avec $f'(-2) = \frac{1}{2}$

Exercice 24

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$.

1) Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur \mathbb{R} par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).

2) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E).

3) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 25 corrigé disponible

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{3}{x-4}$ $I =]4 ; +\infty[$

2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $I =]0 ; +\infty[$

3. $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}$ $I =]-\pi ; \pi[$

4. $f(x) = \tan x$ $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

5. $f(x) = \frac{16x+4}{4x^2+2x+1}$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 26 corrigé disponible

Soit $f(x) = \cos^3 x$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$.

2. En déduire la primitive F telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 27 corrigé disponible

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de l'ensemble de f :

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$$

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$.

Exercice 28

On considère deux fonctions f et F définies sur I .

Dans chaque cas, montrer que F est une primitive de f sur I .

1. $F(x) = (x-1)(-x+4)$ $f(x) = -2x+5$ $I = \mathbb{R}$

2. $F(x) = (4x+1)e^{-x^2}$ $f(x) = (-8x^2-2x+4)e^{-x^2}$ $I = \mathbb{R}$

3. $F(x) = \frac{3x+1}{x-5}$ $f(x) = \frac{-16}{(x-5)^2}$ $I = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

4. $F(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$ $f(x) = \sqrt{5x+2}$ $I =]-\frac{2}{5} ; +\infty[$

Exercice 29

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$ $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$ $I =]\frac{1}{3} ; +\infty[$

3. $f(x) = (2x+1)(x^2+x-7)$ $I = \mathbb{R}$

4. $f(x) = (3x-1)^6$ $I = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^4}$ $I =]\frac{1}{2} ; +\infty[$

6. $f(x) = 6xe^{x^2+1}$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 30

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x) \cos^2(x)$ $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 4 \cos(2x+1)$ $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

4. $f(x) = \cos x \sin^4 x$ $I = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \sin^2 x$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 31

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

a) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}$, $I = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{5}{(2x-1)^3}$, $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty[\right.$

c) $h(x) = \frac{1}{x} \ln x$, $I =]0; +\infty[$

2) Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

a) Montrer que : $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

b) En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$

Exercice 32

Soit (E) l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$y' = 2y - 3y^2$$

On cherche une solution de (E) sur \mathbb{R} telle que :

$$u(0) = \frac{1}{4}$$

1. Soit u une solution de (E) sur \mathbb{R} qui ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

On définit la fonction v sur \mathbb{R} par $v = \frac{1}{u}$.

Démontrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :

(i) u est solution de (E) et $u(0) = \frac{1}{4}$.

(ii) v est solution de $(E') : y' = -2y + 3$ et $v(0) = 4$.

2. Résoudre (E') et déterminer v .

3. En déduire la résolution de (E) et la fonction u .