Suites numériques – Exercices - Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 5u_n + 4$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

2. Démontrer que pour tout n entier, 4^n+5 est un multiple de 3.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.
Montrer que pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1}+1$.

4. On pose $S_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ avec $n \geq 1$

a. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$.

a. Etudier les variations de la fonction $f(x) = x(2-x)$.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Exercice 2 **corrigé disponible**

1. Montrer l'inégalité de Bernouilli ; soit un réel a >0 $n \in \mathbb{N}$ $(1+a)^n \geq 1+na$

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$ et que (u_n) est croissante.

3. Montrer par un raisonnement par récurrence que l'on a pour tout n entier $3^n > n$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$ c'est-à-dire : $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

5. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier n non mul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

6. On considère la suite définie pour tout n $\in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

Démontrer par un raisonnement par récurrence que l'on $u_n = n^2$ pour tout n $\in \mathbb{N}^*$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

Exercice 4 **corrigé disponible**

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et pour tout entier naturel } n, \qquad u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = n^2 + n$$

Exercice 5 **corrigé disponible**

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 6 **corrigé disponible**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$.

1. Quelle est la nature de (u_n) ? Prouver que $u_n = 1 + 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. La suite (v_n) est définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + u_n$.

   (a) Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
   (b) Démonter par récurence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + n^2$
   (c) Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 7 corrigé disponible

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ c) $u_n = \dfrac{3-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{2}{n^2}}$ d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$ f) $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ g) $u_n = n\sqrt{n} - n$ h) $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

i) $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$ j) $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ k) $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$ l) $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

Exercice 8 corrigé disponible

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant sa réponse :

a) Une suite convergente est bornée.
b) Une suite bornée est convergente.
c) Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.
d) Si $u_n - v_n$ tend vers 0 alors u_n et v_n ont la même limite.
e) Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.
f) Si pour tout $n \geqslant 10$: $|u_n - 3| \leq \dfrac{1}{n^2}$ alors (u_n) converge vers 3.

Exercice 9 corrigé disponible

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Pour chacune des questions suivantes, il y a deux conclusions correctes. Vous devez donner au plus deux réponses (celles que vous jugez correctes). Toute réponse exacte rapporte 0,75 point, toute réponse inexacte est pénalisée de 0,5 point. Donner 0, 3 ou 4 réponses à une question rapporte 0 point. Quand l'application de ce barème donne pour une question une note négative, celle-ci est ramenée à 0.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :
   a) La suite (w_n) tend vers $-\infty$.
   b) La suite (u_n) est majorée.
   c) La suite (u_n) tend vers $-\infty$.
   d) La suite (w_n) n'a pas de limite.
2. Si pour tout n $u_n \geq 1$, $w_n = 2u_n$ et $\lim u_n = L$, alors :
   a) $\lim v_n = L$.
   b) La suite (w_n) tend vers $+\infty$.
   c) $\lim(w_n - u_n) = L$.
   d) On ne peut pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
3. Si $\lim u_n = -2$ et $\lim w_n = 2$, alors :
   a) La suite (v_n) est majorée.
   b) $\lim v_n = 0$.
   c) La suite (v_n) n'a pas de limite.
   d) On ne peut pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$, alors :
   a) $\lim w_n = 0$
   b) $\lim u_n = 2$
   c) $\lim v_n = 2$
   d) On ne peut pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

Exercice 10 corrigé disponible

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \dfrac{4n^2+3n-1}{2n+1} - 2n + 3$ b) $u_n = \dfrac{n^2+5n+7}{2-n}$

c) $u_n = 2 - n + (-1)^n$ d) $u_n = 3 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{4}}$

Exercice 11 corrigé disponible

Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+325}$ b) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$ c) $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)}$ d) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$ f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$ g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ h) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Exercice 12 corrigé disponible

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). Démontrer cette conjecture.
2. Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 13 corrigé disponible

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n+1}{3n+5}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n - \sqrt{n} + 3$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \dfrac{\cos n}{n}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n}$

Exercice 14 corrigé disponible

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.
Soit une suite (u_n) de termes strictement positifs

a) Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant 5$, alors la suite (u_n) converge.

b) Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{n}{2}$, alors la suite diverge.

Exercice 15 corrigé disponible

En utilisant la définition de la limite d'une suite, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

Exercice 16 corrigé disponible

Justifier que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Exercice 17 corrigé disponible

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n), où $u_n = \dfrac{2n+1}{4n(n+1)}$ et $v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2 + n\sqrt{n} + 1}$.

Exercice 18 corrigé disponible

1. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
2. Montrer que, pour tout entier $n > 3$, $2^n \geqslant n^2$.
3. En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$.

Exercice 19 corrigé disponible

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. a) Etablir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l.

   c) Déterminer cette limite l.

Exercice 20 **corrigé disponible**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
   b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   c) Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
   d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   a) Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
   b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on determinera la raison et le premier terme.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 21

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n, u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.

c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer $w_{2\,009}$.

Exercice 22

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum.
En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. a) Soit n un entier naturel quelconque.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?
   c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels
	d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1.
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	Affecter à d la valeur $0{,}5d^2$
	Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Exercice 23

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.
   b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).