Mouvement dans un champ gravitationnel – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

DOCUMENT

Connaître sa position exacte dans l'espace et dans le temps, autant d'informations qu'il sera nécessaire d'obtenir de plus en plus fréquemment avec une grande fiabilité. Dans quelques années, ce sera possible avec le système de radionavigation par satellite GALILEO, initiative lancée par l'Union européenne et l'Agence spatiale européenne (ESA). Ce système mondial assurera une complémentarité avec le système actuel GPS (Global Positioning System).
GALILEO repose sur une constellation de trente satellites et des stations terrestres permettant de fournir des informations concernant leur positionnement à des usagers de nombreux secteurs (transport, services sociaux, justice, etc…).
Le premier satellite du programme, Giove-A, a été lancé le 28 décembre 2005.

D'après le site http://www.cnes.fr/

DONNEES :

- *Constante de gravitation :* $G = 6{,}67\times10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
- *La Terre est supposée sphérique et homogène. On appelle O son centre, sa masse* $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg *et son rayon* $R_T = 6{,}38\times10^3$ km
- *Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse* m_{sat} = 700 kg. *Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et il décrit de façon uniforme un cercle de centre O, à l'altitude* $h = 23{,}6\times10^3$ km.

I – Mouvement du satellite Giove-A autour de la Terre

1 – a - Sans souci d'échelle, faire un schéma représentant la Terre, le satellite sur sa trajectoire et la force exercée par la Terre sur le satellite.
b - En utilisant les notations du texte, donner l'expression vectorielle de cette force.

On notera $\vec{n}$ le vecteur unitaire orienté de G vers O

2 – a - Dans quel référentiel le mouvement du satellite est-il décrit ?
b - Quelle hypothèse concernant ce référentiel faut-il faire pour appliquer la seconde loi de Newton ?
c - En appliquant la seconde loi de Newton au satellite, déterminer l'expression du vecteur-accélération $\vec{a}$ du point G.

3 – a - Donner les caractéristiques du vecteur-accélération $\vec{a}$ d'un point matériel ayant un mouvement circulaire uniforme.
b - Montrer alors que la vitesse v du satellite est telle que :

$$v^2 = G\frac{M_T}{R} \quad \text{avec} \quad R = R_T + h$$

4 – a - Définir la période de révolution T du satellite.
Donner son expression en fonction de G, M_T et R.
b - Calculer la période T.

II – Comparaison avec d'autres satellites terrestres

Il existe actuellement deux systèmes de positionnement par satellites : le système américain GPS *et le système russe* GLONASS.
*Le tableau fourni sur l'***ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**, *rassemble les périodes* T *et les rayons* R *des trajectoires des satellites correspondants, ainsi que les données relatives aux satellites de type Météosat.*
Ces données permettent de tracer la courbe donnant T² en fonction de R^3.

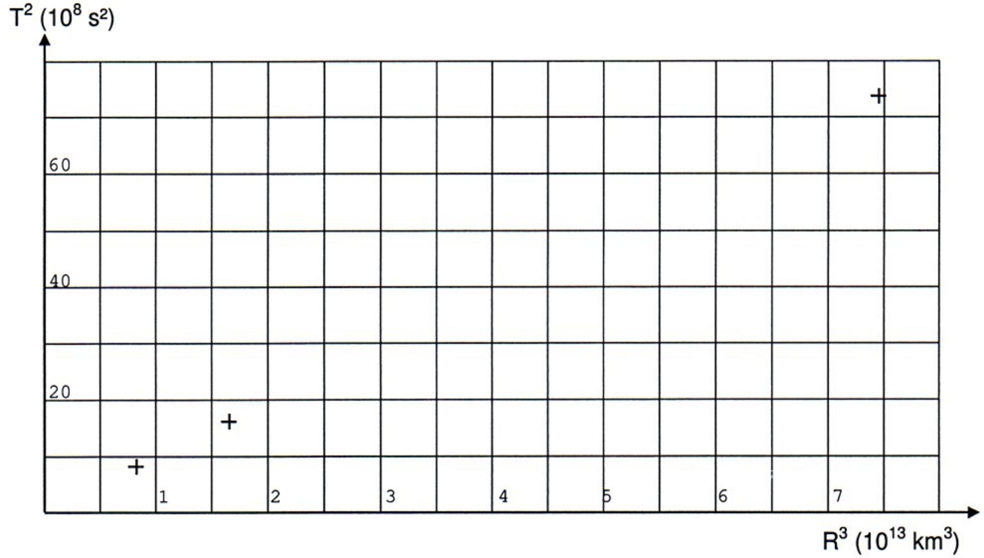
1 - a - Compléter la ligne du tableau relative au satellite Giove-A (GALILEO).
b - Placer le point correspondant dans le système d'axes proposés sur l'annexe et tracer la courbe donnant T^2 en fonction de R^3.

2 - a - Que peut-on déduire du tracé précédent ? Justifier.
b - Montrer que le résultat de la question I-4-a est conforme au tracé obtenu.
c - Comment nomme-t-on la loi ainsi mise en évidence ?

ANNEXE À RENDRE AGRAFÉE AVEC LA COPIE

Satellite	Rayon de la trajectoire R (km)	Période de révolution T (s)	R^3 (km^3)	T² (s²)
GPS	$20{,}2\times10^3$	$2{,}88\times10^4$	$8{,}24\times10^{12}$	$8{,}29\times10^8$
GLONASS	$25{,}5\times10^3$	$4{,}02\times10^4$	$1{,}66\times10^{13}$	$1{,}62\times10^9$
GALILEO				
METEOSAT	$42{,}1\times10^3$	$8{,}58\times10^4$	$7{,}46\times10^{13}$	$7{,}36\times10^9$

COURBE DONNANT T^2 EN FONCTION DE R^3 :



Exercice 2 corrigé disponible

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de quelques planètes du système solaire et de déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia, récemment découvert par une équipe d'astronomes. Celui-ci a la forme d'une grosse pomme de terre mesurant quelques centaines de kilomètres.

Par souci de simplification, dans tout l'exercice, les astres étudiés sont considérés à répartition sphérique de masse.

Donnée : constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I

Les représentations vectorielles demandées sont à effectuer sans souci d'échelle.

1. En hommage à Kepler

« Johannes Kepler, né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne), mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne, est un astronome célèbre. Il a étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic. Il a également découvert que les trajectoires des planètes n'étaient pas des cercles parfaits centrés sur le Soleil mais des ellipses. En outre, il a énoncé les lois (dites lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. »

1.1. Planètes en orbite elliptique.

La figure 10 ci-dessous représente la trajectoire elliptique du centre d'inertie M d'une planète du système solaire de masse m dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen. Les deux foyers F_1 et F_2 de l'ellipse et son centre O sont indiqués.

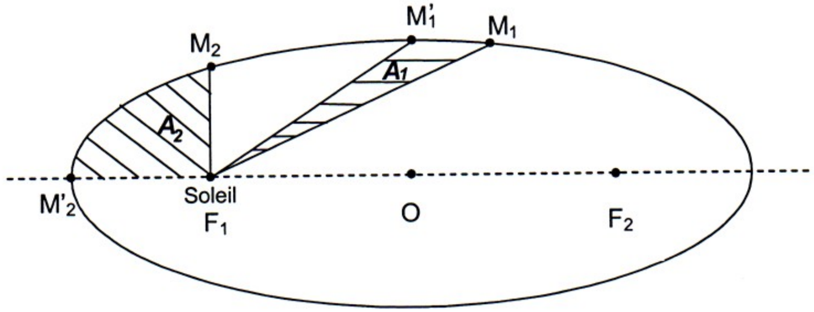


Figure 10

1.1.1. En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure 10.

1.1.2. On suppose que les durées de parcours entre les points M_1 et M'_1 puis M_2 et M'_2 sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées A_1 et A_2 sur la figure 10.

1.1.3. La valeur de la vitesse moyenne entre les points M_1 et M'_1 est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre les points M_2 et M'_2 ? Justifier.

Exercice 3 corrigé disponible

L'astronaute Thomas Pesquet s'est envolé dans l'espace pour une mission de longue durée, appelée mission Proxima, lors de laquelle il a mené à bien de multiples activités scientifiques et pédagogiques. Pendant six mois, son domicile et son lieu de travail se sont trouvés à environ 400 kilomètres au-dessus de la Terre.
Thomas Pesquet a décollé à bord d'un lanceur russe Soyouz du cosmodrome de Baïkonour au Kazakhstan en novembre 2016, et est revenu sur Terre en mai 2017. Il était accompagné du cosmonaute russe Oleg Novitsky et de l'astronaute de la NASA Peggy Whitson.

A. À la rencontre de la station spatiale internationale (ISS).

Les systèmes de lanceurs Soyouz mettent des modules habités et des satellites en orbite autour de la Terre depuis près d'un demi-siècle. Ce sont les lanceurs les plus utilisés au monde.

Lors du décollage du lanceur Soyouz, quatre propulseurs d'appoint assurent la poussée pendant les deux premières minutes de vol avant d'être largués par le lanceur. Au bout d'environ dix minutes de vol, à une altitude de près de 220 km, le module Soyouz est mis en orbite autour de la Terre, puis après des corrections orbitales, il rejoint l'orbite de la station spatiale internationale à une altitude d'environ 400 km.

Données :

- rayon de la Terre : R_T = 6380 km ;
- altitude de l'orbite basse du module Soyouz : h_S = 220 km ;
- période orbitale du module Soyouz sur son orbite basse : T_S = 88,66 min ;
- altitude de l'orbite haute du module Soyouz : H_S = 320 km ;
- altitude de la station spatiale internationale (ISS) : h_{ISS} = 400 km.

L'étude est conduite dans le référentiel géocentrique ayant pour origine le centre de la Terre et don les axes pointent vers trois étoiles lointaines. Ce référentiel est supposé galiléen.

1. Orbites du module Soyouz et de l'ISS

Au bout de 10 min de vol, le module Soyouz atteint son orbite basse considérée comme circulaire.

1.1. En utilisant la période orbitale du module Soyouz, déterminer la valeur de sa vitesse V_S sur son orbite basse.

On considère que le module Soyouz et la station spatiale internationale (ISS) ont des orbites circulaires.

1.2. Démontrer l'expression suivante en explicitant votre démarche :

$$\frac{T_S^2}{(R_T+h_S)^3}=\frac{T_{ISS}^2}{(R_T+h_{ISS})^3}$$

1.3. Déterminer la valeur de la vitesse V_{ISS} de la station spatiale internationale sur son orbite.

2. Orbite de transfert

Pour que le module Soyouz puisse rejoindre l'orbite de l'ISS des corrections orbitales sont nécessaires. On s'intéresse à présent à une première étape permettant au module Soyouz de se trouver sur une orbite haute plus proche de l'ISS.

À un instant donné, lorsque le module Soyouz passe par le point A de son orbite basse, on modifie la valeur de sa vitesse, sans changer sa direction, jusqu'à une valeur V_1. Le module Soyouz suit alors une trajectoire elliptique appelée orbite de transfert (**figure 1**).

Lorsque le module Soyouz arrive au point B de son orbite de transfert, il a une vitesse V_2, on modifie à nouveau la valeur de sa vitesse, sans changer sa direction, jusqu'à la valeur finale V_F qui permet au module de rester sur une orbite haute.

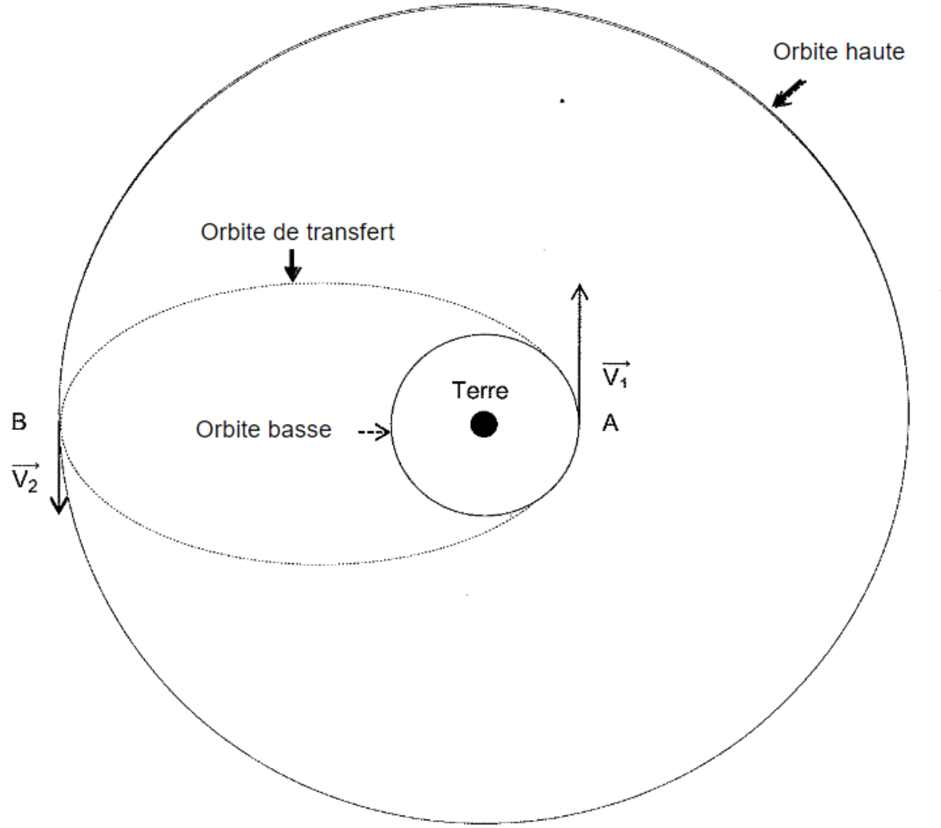


Figure 1 : Représentation de l'orbite de transfert du module Soyouz (sans souci d'échelle)

2.1. Énoncer la deuxième loi de Kepler. En quoi cette loi permet-elle de montrer que $V_2 < V_1$?

L'expression de l'énergie potentielle E_P du module Soyouz, définie à une constante près, est la suivante :

$$E_P = -\frac{G.m.M_T}{R_T + h}$$

avec m : la masse du satellite ;
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ m^3.s^2.kg^{-1} : la constante de gravitation ;
$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg : la masse de la Terre ;
h : l'altitude du vaisseau Soyouz.

2.2. Montrer que l'énergie potentielle E_P(B) du module Soyouz au point B est plus est plus grande que l'énergie E_P(A) au point A.

2.3. Justifier que l'énergie mécanique du module Soyouz sur son orbite de transfert entre les points A et B ne varie pas.

2.4. En déduire si la variation d'énergie cinétique entre A et B est positive ou négative. Ce résultat est-il en accord avec la 2ème loi de Kepler ?

2.5. Exprimer l'énergie mécanique du module Soyouz au point A en fonction de m, G, M_T, h_S, R_T et V_1.

2.6. Sachant que la valeur de la vitesse V_1 est égale à $7{,}80\times10^3$ m.s^{-1}, déterminer la valeur de la vitesse V_2. Ce résultat est-il en accord avec les résultats précédents ?

3. Ajustement final

Que faut-il faire ensuite pour que le module Soyouz atteigne la station spatiale ISS ?

Exercice 4 corrigé disponible

Grâce aux données observationnelles constituées par Tycho Brahe, l'astronome Johannes Kepler publie en 1609 et 1619 trois lois :

- première loi : chaque planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers ;
- deuxième loi : le segment Soleil-planète balaie des aires égales pendant des durées égales ;
- troisième loi : le cube du demi-grand axe de l'orbite divisé par le carré de la période de révolution est une constante.

Ces lois ont été énoncées historiquement dans le contexte très spécifique du système solaire. L'objectif de cet exercice est d'interroger plus spécifiquement la deuxième loi.

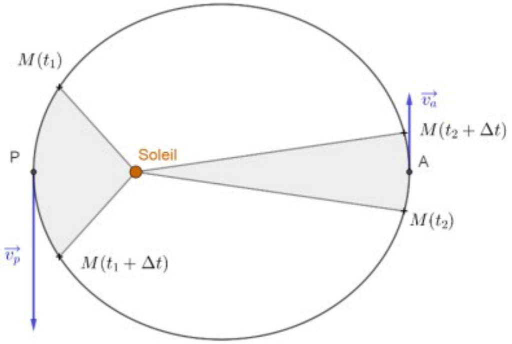
Les orbites elliptiques quasi-circulaires de la Terre et de Mars

Les orbites de la Terre et de Mars sont souvent considérées comme circulaires. Ce sont pourtant des ellipses. Dans le référentiel héliocentrique, la valeur de leur vitesse varie le long de l'orbite entre v_{min} et v_{max}, tout comme la distance Soleil-planète varie entre R_{min} et R_{max}. Le rayon moyen R_{moy} est défini comme le rayon du cercle approximant au mieux la trajectoire de la planète. La vitesse v_{moy} est défini comme la vitesse de la planète sur cette trajectoire circulaire.

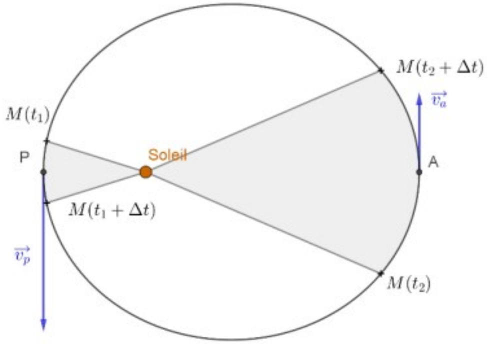
Terre	Mars	Jupiter
$v_{Tmin} = 29{,}3$ km.s^{-1} $v_{Tmax} = 30{,}3$ km.s^{-1} $v_{Tmoy} = 29{,}8$ km.s^{-1}	$v_{Mmin} = 22{,}0$ km.s^{-1} $v_{Mmax} = 26{,}5$ km.s^{-1} $v_{Mmoy} = 24{,}1$ km.s^{-1}	$v_{Jmin} = 12{,}4$ km.s^{-1} $v_{Jmax} = 13{,}7$ km.s^{-1} $v_{Jmoy} = 13{,}1$ km.s^{-1}
$R_{Tmin} = 147 \times 10^6$ km $R_{Tmax} = 152 \times 10^6$ km $R_{Tmoy} = 150 \times 10^6$ km	$R_{Mmin} = 207 \times 10^6$ km $R_{Mmax} = 249 \times 10^6$ km $R_{Mmoy} = 228 \times 10^6$ km	$R_{Jmin} = 741 \times 10^6$ km $R_{Jmax} = 816 \times 10^6$ km $R_{Jmoy} = 778 \times 10^6$ km

1. À l'aide de la deuxième loi de Kepler, identifier le schéma correct parmi les suivants. Justifier.
   Pour chaque schéma, on représente la position de la planète au voisinage de son périhélie P (respectivement aphélie A) entre les instants t_1 et $t_1 + \Delta t$ (respectivement t_2 et $t_2 + \Delta t$) ainsi que son vecteur vitesse à cette position dans le référentiel héliocentrique.

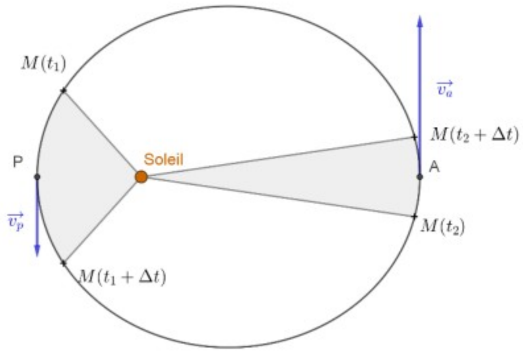
a.



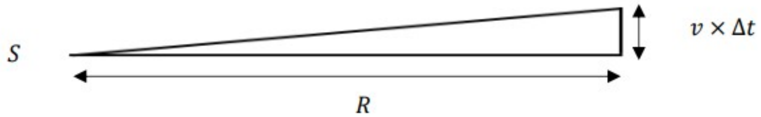
b.



c.



Lorsque la planète est située à l'aphélie ou au périhélie, le segment Soleil-Terre est perpendiculaire au vecteur vitesse. L'aire balayée par le segment Soleil-Terre pendant une durée Δt courte devant la période de révolution, correspond approximativement alors à l'aire du triangle rectangle ayant pour sommets S, le centre du Soleil, $M(t)$, position de Terre à l'instant t et $M(t+\Delta t)$, position de Terre à l'instant $t+\Delta t$:



Dans le schéma ci-dessus, R est la longueur du segment Soleil-Terre, et $v \times \Delta t$ la distance parcourue par la planète durant la durée Δt à la vitesse v.

2. Exprimer l'aire balayée par le segment Soleil-Terre durant Δt en fonction de R, v et Δt.

3. En déterminant la valeur de l'aire balayée par le segment Soleil-Terre durant $\Delta t = 1$ s, vérifier que les données dans le cas de la Terre sont compatibles avec la seconde loi de Kepler.

4. À l'aide des données disponibles déterminer si l'aire balayée durant 1 s est la même pour la Terre et pour Mars.

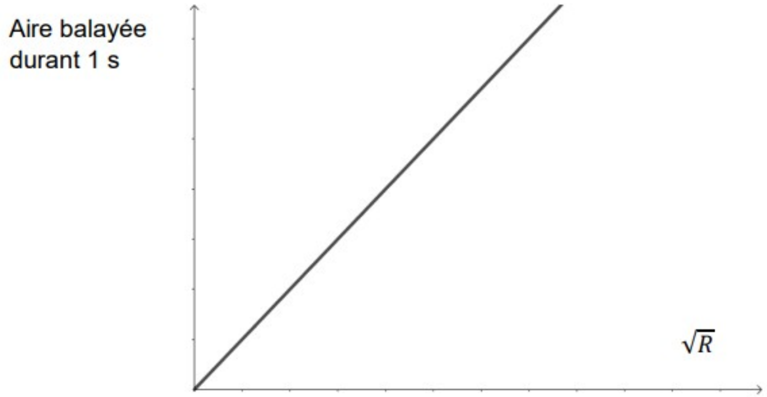
Pour la suite de l'exercice, on assimilera les orbites à des cercles. On souhaite étudier l'aire balayée en fonction du rayon de l'orbite pendant une même durée. On étudie une planète dont l'orbite est supposée parfaitement circulaire de rayon R. On note M_S la masse du Soleil.

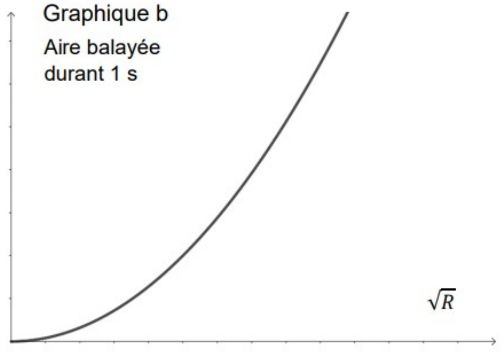
5. À l'aide de la deuxième loi de Newton, établir l'expression de la vitesse v en fonction de G, R, et M_S : $v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$.

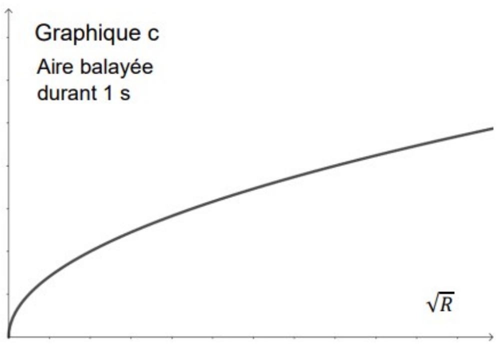
6. Déterminer l'expression de l'aire balayée durant Δt en fonction de G, R, M_S et Δt.

7. Identifier le graphique correspondant à l'expression de l'aire en fonction de la racine carrée du rayon parmi les propositions suivantes. Justifier.

Graphique a




Graphique b
Aire balayée
durant 1 s
$\sqrt{R}$


Graphique c
Aire balayée
durant 1 s
$\sqrt{R}$