

Fonction inverse – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

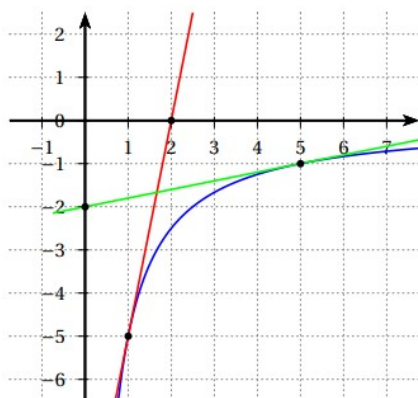
Trouver un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans les cas suivants :

- a) si $x \in [1 ; 10]$;
- b) si $x \in [-2 ; -1]$;
- c) $2 < x < 5$;
- d) $-100 \leq x \leq -10$.

Exercice 2 corrigé disponible

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée dans le repère ci-contre :

- 1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(5)$.
- 2. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(5)$.
- 3. En déduire l'équation réduite des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 à la courbe de la fonction f .



Exercice 3 corrigé disponible

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes définies sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$:

- 1. $f(x) = -2 + \frac{1}{x}$
- 2. $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$

Exercice 4 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- 1. Calculer $f'(x)$.
- 2. Montrer que pour tout réel x non nul : $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
- 3. Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f .

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -4x + 1 - \frac{9}{x}$.

- 1. Montrer que pour tout réel x non nul : $f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$.
- 2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
- 3. En déduire les variations de la fonction f sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Exercice 6

Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x + 10 - \frac{1}{x}$.

- 1. Montrer que pour tout réel x non nul : $g'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$.
- 2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
- 3. En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Exercice 7

Soit h la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7x - \frac{4}{x}$.

- Déterminer $h'(x)$.
- Montrer que pour tout réel x non nul : $h'(x) = \frac{(x-2)(x-1)(3x+2)}{x^2}$.
- Étudier le signe de $h'(x)$ sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.
- En déduire les variations de la fonction h sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.

Exercice 8

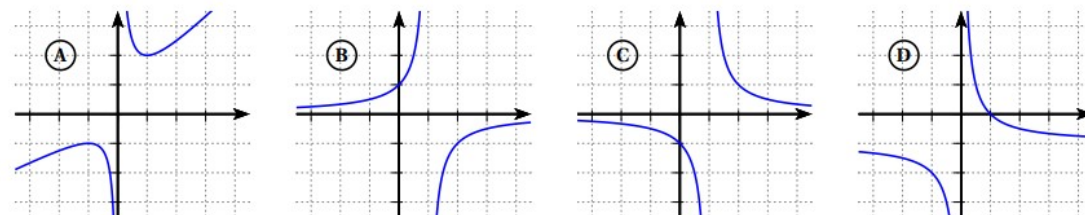
- Montrer que pour tout réel x , on a : $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.
- Étudier le signe de $x^4 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.
 - Calculer $f'(x)$.
 - Démontrer que pour tout réel x non nul : $f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$.
 - Étudier les variations de f sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.

Exercice 9

- Développer $(x-3)(x+3)$ et $(x-5)(x+5)$.
- Développer $(x^2-9)(x^2-25)$.
- Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 34x + \frac{7}{3} - \frac{225}{x}$.
 - Déterminer $f'(x)$.
 - Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.
 - En déduire les variations de f sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.

Exercice 10

Sur les graphiques ci-dessous sont représentées quatre fonctions :



Associer à chaque limite le graphique où elle est vraie.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Exercice 11

On veut tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 3 - \frac{2}{x}$.

- a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-1 000	-500	-100	-50	50	100	500	1 000
$g(x)$								

- Que peut-on en déduire sur le comportement de g en $+\infty$ et en $-\infty$?

- a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	0,01	0,1	0,5	1
$g(x)$								

- Que peut-on en déduire sur le comportement de g en 0?

- a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

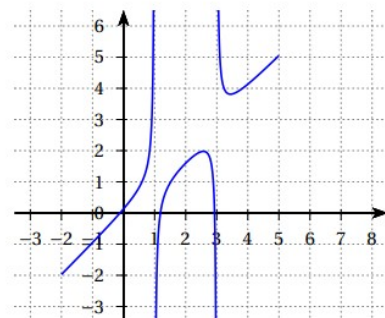
x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$g(x)$								

- Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer la courbe de la fonction g .

Exercice 12

Sur le graphique ci-contre, on a représenté la courbe d'une fonction f .

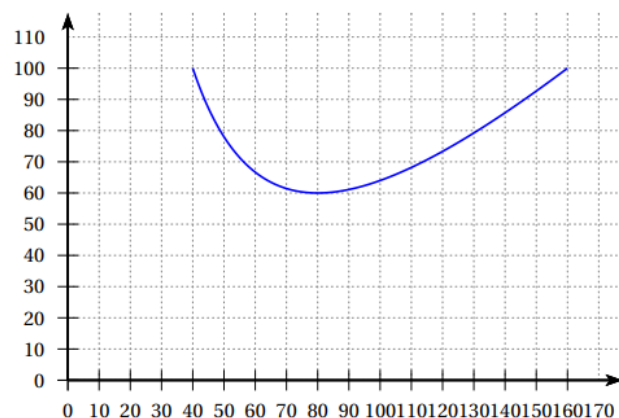
1. Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Conjecturer les limites aux bornes de son ensemble de définition.



Exercice 13

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[40 ; 160]$ par : $f(x) = x - 100 + \frac{6\,400}{x}$.

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère.



1. Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle peut s'écrire : $f'(x) = \frac{x^2 - 6\,400}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[40 ; 160]$.
3. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[40 ; 160]$.
4. Le coût, exprimé en F, de x repas préparés par service dans un restaurant, peut s'écrire, pour $x \in [40 ; 160]$:

$$C(x) = x^2 - 100x + 6\,400$$

a. Compléter le tableau :

Nombre de repas	40	50	100
Coût de x repas			
Coût moyen d'un repas			

- b. Écrire le coût moyen d'un repas en fonction du nombre x de repas préparés. On notera ce coût moyen unitaire $C_m(x)$.
- c. Déduire de la **question 3.** le nombre de repas que ce restaurant doit servir pour que le coût moyen d'un repas soit minimal.
- d. Trouver, à l'aide du graphique, à quel intervalle doit appartenir x pour que le coût moyen unitaire soit inférieur ou égal à 90 F.

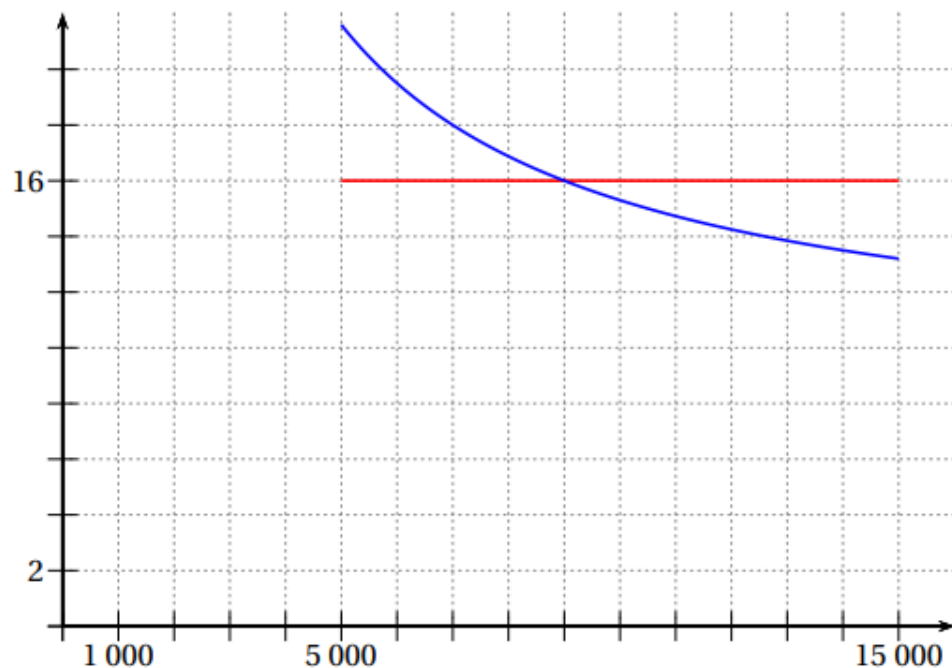
Exercice 14

PARTIE A.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[5\,000 ; 15\,000]$ par : $f(x) = 9 + \frac{63\,000}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f .
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[5\,000 ; 15\,000]$.
3. Dans le repère suivant sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[5\,000 ; 15\,000]$ et la droite (d) d'équation $y = 16$.

Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite (d) . On tracera les pointillés utiles à la lecture.



PARTIE B.

Un restaurateur propose un menu unique.

- Les charges fixes sont estimées pour une année à 63 000 €.
- Le coût de préparation d'un repas est estimé à 9 €.
- Le prix du menu est de 16 €.

Dans cette partie on suppose que tous les repas préparés sont vendus. On désigne par x le nombre de repas servis en un an et on suppose que x appartient à l'intervalle $[5\,000 ; 15\,000]$.

1. On note $g(x)$ le coût total annuel en € de ces x repas. Déterminer $g(x)$.
2. Montrer que le coût de revient d'un repas est égal à l'expression $9 + \frac{63\,000}{x}$.
3. À l'aide du graphique, déterminer le seuil de rentabilité du restaurant, c'est-à-dire le nombre minimum de repas qu'il faut servir annuellement pour que l'exploitation du restaurant dégage un bénéfice. Justifier.

4. a. Montrer que le bénéfice total annuel pour x repas s'exprime en € par :

$$B(x) = 7x - 63\,000$$

- b. Ecrire et résoudre l'inéquation qui permet de retrouver par le calcul le seuil de rentabilité du restaurant.
- c. L'objectif du restaurateur est de réaliser un bénéfice annuel de 35 000 € minimum. Sachant que le restaurant est ouvert 300 jours dans l'année, quel nombre de repas doit-il servir, en moyenne, au minimum par jour pour atteindre cet objectif?