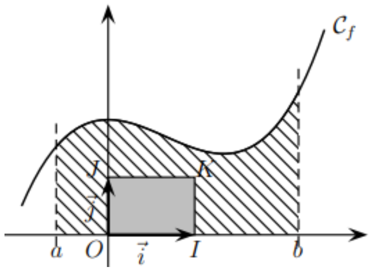
Intégration – Fiche de cours

1. Aire et intégrales

a. Fonction positive

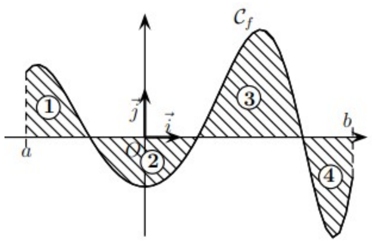
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a; b]
L'aire du domaine D délimité par la courbe Cf , l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = a et x = b est appelée $\int_a^b f(x)\,dx$



b. Fonction continue

Pour une fonction f quelconque (continue mais pas forcément positive), l'intégrale de f sur [a; b] est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
L'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3) - \text{aire}(\mathcal{D}_4)$$



c. Aire d'un domaine compris entre 2 courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a; b]
L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives Cf et Cg de f et g et les droites d'équations x = a et x = b est définie par :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

2. Propriétés de l'intégrale

- Existence d'une intégrale sur un intervalle

Toute fonction continue sur [a ; b] admet une intégrale sur cet intervalle.

- Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Pour tout nombre a, b et c de I, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Positivité

Soit une fonction f continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \le b$. Si $f \ge 0$ sur [a ; b], alors : $f(x) \ge 0$

- Ordre d'intégration

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \le b$. Si f g sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

- Primitive et intégrale

Une intégrale est définie par la relation :

$$A = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- Valeur moyenne Sur un intervalle [a ;b] : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

3. Intégrales et primitives

$f(x)$	$F(x)$	I
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$ax^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega x + \varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega x + \varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{A}{\omega}\sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$