Nombres complexes – Fiche de cours

1. Rappels nombres complexes

a. Définition

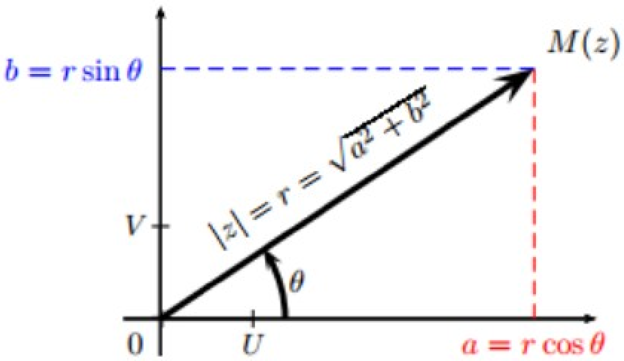
Un nombre complexe est défini par :

$z = x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe

x : partie réelle notée $\mathrm{Re}(z)$ y : partie imaginaire notée $\mathrm{Im}(z)$

b. Forme trigonométrique

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ ayant pour image M dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$



On définit le module de z par $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $r > 0$

ou bien $|(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$

On définit un argument de z par $\theta = arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

La forme trigonométrique est définie par : $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$

2. Forme exponentielle

a. Définition

La forme exponentielle d'un nombre complexe est définie par :

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \theta}$$

b. Propriétés

Soit θ et θ' des nombres réels et n un nombre entier

- produit : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$
- quotient : $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$
- puissance : $(e^{i\theta})^n = e^{i \cdot n\theta}$

3. Trigonométrie

a. Formule d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

b. Formule de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \,.\, \sin a$$

c. Linéarisation et intégrales

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_T \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{T}\int_T \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}$$

4. Transformations du plan

Soit z affixe du point M du plan et z' l'affixe de son image M' dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ par une transformation du plan

- translation $M' = \vec{t}_{\vec{u}}(M)$ $z' = z + z_{\vec{u}}$
- homothétie $M' = \overrightarrow{h_{O,a}}(M)$ $z' = a \cdot z$ avec $a \in \mathbb{R}$
- rotation $M' = \overrightarrow{h_{O,\theta}}(M)$ $z' = a \cdot z$ avec $\theta = arg(a)$